

Introduction

Le conventionalisme auquel Poincaré s'oppose dans les textes qu'il publie de 1902 à sa mort, en 1912, n'a pas exactement le même contenu que celui qui était apparu aux premières lueurs de la très rebattue "Révolution scientifique". Le texte dans lequel Copernic présente la forme définitive de son système du monde¹ est en effet livré avec une étonnante Préface qui est signée par Osiander². Ce dernier, dont les intentions ne sont pas très claires, affirme sans ambages que rien de ce qui apparaît dans le livre de Copernic ne doit être considéré en dehors des limites propres aux hypothèses mathématiques. Sans être pour autant le fruit de fausses pensées, l'héliocentrisme n'existe, selon ce texte, qu'en vertu d'une licence mathématique : son mode d'être théorique lui ôte par conséquent toute prétention à décrire un ordre réel des mouvements planétaires. Toute la démarche de Galilée, dans ses écrits cosmologiques, consistera à mettre en cause cette lecture du système copernicien, en cherchant dans les cieux des preuves observationnelles et sur Terre des arguments physiques mettant en évidence le mouvement des planètes autour d'un centre solaire commun. Le conventionalisme astronomique, dont ni Galilée ni, par la suite, Christiaan Huygens ne veulent être des partisans, semble justifié en première analyse par l'équivalence des systèmes astronomiques : le principe de relativité a pour conséquence la possibilité d'affirmer en toute rigueur que la terre ne se meut pas. En ce sens Descartes, dans un passage célèbre des *Principia Philosophiæ*, Troisième partie, pourra se défaire en toute rigueur de l'hypothèse copernicienne.

En mécanique théorique, le problème de la convention subit un déplacement puisque l'équivalence des hypothèses n'y a pas la même fonction qu'en astronomie. Ainsi l'usage de convention ne porte pas sur la relation d'une description à un objet, mais sur la légitimité même d'une application glo-

¹*De revolutionibus orbium cælestium*, 1543

²Théologien. Son interprétation est aussi celle de Rheticus dans la *Narratio prima*, éd. critique, trad. française, H. Hugonnard-Roche et P. Vernet, *Studia Copernicana XX*, Wrocław-Warszawa, 1982, p. 238-245

bale de la géométrie au réel. Galilée semble avoir été l'auteur d'une doctrine selon laquelle les objets mathématiques et les objets naturels dont ils rendent compte se superposent en vertu du présupposé classique selon lequel le monde possède une structure objective d'ordre. La thèse universellement répandue de Koyré consiste à montrer que cette superposition de la géométrie au réel ne peut se faire que sur le fond d'un platonisme qui substitue à l'espace concret des phénomènes naturels³ un espace euclidien vidé de toute substance matérielle, seul support des lois du mouvement. La science galiléenne ne serait donc qu'une géométrie et la nature concrète n'y serait pensée qu'à travers une réduction nécessaire : science théorique, la mécanique galiléenne est donc suspectée de n'avoir pas été expérimentale. La convention ou construction intellectuelle des lois y est parfaitement naturelle dans la mesure où la langue géométrique n'est pas autre chose qu'une grammaire des phénomènes naturels : tous les mots ordonnés que l'on forge par une saine expérience de pensée correspondent nécessairement à un possible de la nature dont l'observation expérimentale ne ferait alors que valider, de façon médiante et dérivée, la simple actualité. A l'appui de cette lecture du conventionalisme idéaliste de Galilée, telle page de *Il Saggiatore* ou la mention de l'une des nombreuses expérimentations fictives dont Galilée affirme être l'auteur peuvent être données.

Cette thèse ne semble pas correspondre exactement à une double série de textes galiléens dans lesquels d'une part Galilée consigne les expériences par lesquelles il vérifie la convergence du possible des lois et des cas concrets de mouvement. Ce sont les manuscrits de Padoue. D'autre part, à plusieurs reprises, Galilée s'interroge sur la nature de l'outil géométrique. Il lui assigne des limites, des conditions d'application qui en montrent assez la nature formelle et ustensile. Dans ces limites prescrites par la structure même du milieu, la géométrie est le langage adéquat. Ni pure convention, ni langue originaire de l'univers, la géométrie tire de son propre fonds les règles de sa formation, mais elle sait aussi déterminer des conditions restrictives sur ses propres opérations à partir de l'acte qui consiste à définir les conditions imposées par une physique des milieux denses.

Le conventionalisme de Poincaré est situé dans cet entre-deux méthodologique, qui commande à la science de penser les hypothèses qui sont les siennes comme autant de conventions, certes, mais dont le degré d'indifférence face à la structure de l'objet ne saurait être égal dans tous les champs couverts par la pensée scientifique. La science classique a élevé le conventionalisme au

³En fait tout phénomène est réduit à son activité mesurable de déplacement et toute la mécanique est une cinétique.

rang de dogme dans tous les domaines où les mathématiques fournissent un vecteur commode d'axiomatisation.

Descartes, qui est si peu physicien, montre l'affinité du mécanisme et de l'usage d'hypothèses qui, pour être librement choisies par l'esprit, n'en sont pas moins naturelles au sens où elles correspondent, si elles sont bien choisies, à un aspect rigoureux du fonctionnement de phénomènes naturels :

Principes de la philosophie, III, art. 203

"Comment on peut paruenir à la connaissance des figures, grandeurs et mouuemens des corps insensibles" -

(...)j'ay, premierement, consideré en general toutes les notions claires & distinctes qui peuuent estre...en nostre entendement touchant les choses materielles [figures, grandeurs et mouuements, ainsi que les règles de la Géométrie et des Mechaniques : c'est la Première et la Seconde Partie des Principes] (...). Et par apres, lors que j'ay rencontré de semblables effets dans les corps que nos sens aperçoivent, j'ay pensé qu'ils auoient pu estre ainsi produits. Puis j'ay creu qu'ils l'auoient infailliblement esté, lorsqu'il m'a semblé estre impossible de trouuer en toute l'estenduë de la nature une autre cause capable de les produire. A quoy l'exemple de plusieurs corps, composez par l'artifice des hommes, m'a beaucoup seruy : car je ne reconnois aucune difference entre les machines que font les artisans & les diuers corps que la nature seule compose, sinon que les effets des machines ne dépendent que de l'agencement de certains tuyaux, ou ressorts, ou autres instruments, qui, devant auoir quelque proportion avec les mains de ceux qui les font, sont tousjours si grands que leurs figures et mouuemens se peuuent voir, au lieu que les tuyaux ou ressorts qui causent les effets des corps naturels sont ordinairement trop petits pour estre apperceus de nos sens. Et il est certain que toutes les regles des Mechaniques appartiennent à la Physique..., en sorte que toutes les choses qui sont artificielles, sont avec cela naturelles".

L'hypothèse est de l'ordre des notions claires et distinctes, mais telles qu'elle correspondent exactement, dans le visible, à un processus mécanique qui ne tombe pas sous le sens. La communauté du mécanisme enrégimente l'esprit et le corps : les idées adéquates puisées dans la technique ne que des idées naturelles, parce qu'elles dépendent, tout comme les objets naturels, des règles de la mécanique.

Première partie

Mathématiques (I) Le nombre et la grandeur

Chapitre 1

Nature du raisonnement mathématique

L'interrogation suscitée, à la fin du XIX^{eme} siècle, par la *crise des fondements* justifie l'énoncé du faux paradoxe par lequel Poincaré entame sa réflexion sur le statut des énoncés mathématiques. Cette entrée en matière ne saurait être regardée comme un pur effet de rhétorique de la part de Poincaré. Le contentieux intellectuel qui l'oppose à Russell, en particulier, ainsi qu'à l'ensemble des logiciens qui, sur le fondement des travaux de Frege, veulent logiciser les mathématiques, c'est-à-dire les fonder en montrant qu'elles dérivent d'une structure axiomatique qui en est comme la grammaire. Dans une série d'articles de 1905, Poincaré, actif tout à la fois sur le front de la relativité einsteinienne, du quantum discontinu de Planck et de la crise logiciste des fondements, attaque le philosophe Louis Couturat dont l'ouvrage, *Les mathématiques et la logique*, prenaient acte de la réduction des mathématiques à la logique. L'idéal leibnizien d'une mathématique calculable, dans laquelle l'intuition n'a plus de part réelle, trouvait là son expression contemporaine. Contre cette lecture de la nature du raisonnement mathématique, Poincaré affirme à plusieurs reprises une double thèse : les propositions mathématiques relèvent de jugements a priori mais leur nécessité interne suppose que l'intuition soit à l'œuvre. Il n'y a de mathématiques que dans l'activité de *synthèse a priori* et la vaste réduction des mathématiques à la logique suppose que tous les jugements mathématiques soient analytiquement contenus dans la logique, calculables à partir de ses expressions axiomatisées. Or cette conception méconnaît l'aspect infiniment *ouvert* des théories mathématiques. La référence explicite aux thèses de ce qui devait par la suite se développer en une école 'logiciste' est ainsi présentée en contrepoint d'une représentation des mathématiques comme définies par la rigueur :

”Si cette science n’est déductive qu’en apparence, d’où lui vient cette parfaite rigueur que personne ne songe à mettre en doute ? Si, au contraire, toutes les propositions qu’elle énonce peuvent se tirer les unes des autres par les règles de la logique formelle, comment la mathématique ne se réduit-elle pas à une immense tautologie ? [31]”

Le Congrès mathématique de 1900, qui fait pendant à l’Exposition universelle, permet de mieux comprendre le sens exact de cet enchaînement de propositions : loin d’être paradoxales, elles s’enchaînent. La ”rigueur” avancée par Poincaré est en effet le terme par lequel Hilbert définit les mathématiques dans sa conférence intitulée ”Sur les problèmes futurs des mathématiques”. Hilbert est en effet partisan d’une méthode axiomatique par laquelle il assigne aux mathématiques un pouvoir potentiellement infini de résolution des problèmes. Ce faisant il rejoint, comme Frege avant lui mais sans intention d’y réduire le raisonnement mathématique, le projet leibnizien d’un calcul universel destiné à éliminer l’intuition des procédures de preuve. D’une certaine façon, l’invention par Leibniz du calcul différentiel puis intégral correspond à une éviction du génie intuitif qui fait le grand géomètre : en systématisant dans une algèbre simple les outils géométriques fondamentaux (tangentes, triangles semblables, sous-tangentes), il rendait possible un *calculemus* universel : le mathématicien pouvait être médiocre s’il était attentif aux règles analytiques et aux signes des éléments du calcul.

Or Poincaré oppose à Hilbert l’idée selon laquelle les mathématiques reposent essentiellement sur l’intuition. Cette dernière est le chaînon manquant dans cette contradiction qui ouvre *La science et l’hypothèse* : rigoureuse et, si l’on veut, axiomatisée autant qu’il est possible, la science mathématique ne peut néanmoins se réduire à un simple principe d’identité qui nous ferait parcourir tous les théorèmes sans jamais faire acte d’invention. Quoique réellement déductives (c’est là leur pôle rigoureux), les mathématiques ne sont pas réductibles aux règles de formation logique des énoncés. Bien qu’elles soient logiques, les mathématiques ne se présentent pas comme une suite de déductions logiques, construites par simple analyse. L’intuition et la rigueur déductive constituent les mathématiques comme des systèmes formels ouverts et incomplets*, ainsi que Gödel le montrera dans les années 30. La conférence de Poincaré au Congrès de 1900 a pour titre : ”Du rôle de l’intuition et de la logique en mathématiques”. Cette conférence, publiée au titre du Chapitre premier de *La valeur de la science*¹, a pour pivot conceptuel

¹Paris : Flammarion, 1970. Edition consultée : Paris : Champs-Flammarion, 1998, notée VS

la différence entre logique et intuition, démonstration et invention. Dans un langage kantien, il s'agit tout simplement de l'opposition entre analyse et synthèse :

”Voyons ce qui est arrivé, par exemple pour l'idée de fonction continue. Au début, ce n' était qu' une image sensible, par exemple, celle d' un trait continu tracé à la craie sur un tableau noir. Puis elle s' est épurée peu à peu, bientôt on s' en est servi pour construire un système compliqué d' inégalités, qui reproduisait pour ainsi dire toutes les lignes de l' image primitive ; quand cette construction a été terminée, on a décintré, pour ainsi dire, on a rejeté cette représentation grossière qui lui avait momentanément servi d' appui et qui était désormais inutile ; il n' est plus resté que la construction elle-même, irréprochable aux yeux du logicien. Et cependant si l' image primitive avait totalement disparu de notre souvenir, comment devinerions-nous par quel caprice toutes ces inégalités se sont échafaudées de cette façon les unes sur les autres ? (...) Cette vue d' ensemble est nécessaire à l' inventeur ; elle est nécessaire également à celui qui veut réellement comprendre l' inventeur ; la logique peut-elle nous la donner ? Non ; le nom que lui donnent les mathématiciens suffirait pour le prouver. En mathématiques, la logique s' appelle analyse et analyse veut dire division, dissection. elle ne peut donc avoir d' autre outil que le scalpel et le microscope. Ainsi, la logique et l' intuition ont chacune leur rôle nécessaire. Toutes deux sont indispensables. La logique qui peut seule donner la certitude est l' instrument de la démonstration : l' intuition est l' instrument de l' invention”².

La mention de la distinction kantienne n' est pas infondée dans la mesure où Poincaré ajoute plus loin :

”La plupart d' entre nous, s' ils voulaient voir de loin par la seule intuition pure, se sentiraient bientôt pris de vertige. Leur faiblesse a besoin d' un bâton plus solide et, malgré les exceptions dont nous venons de parler, il n' en est pas moins vrai que l' intuition sensible est en mathématiques l' instrument le plus ordinaire de l' invention.”³.

A la représentation traditionnelle de l'opposition entre logicistes et intuitionnistes, dont le fondement est souvent donné sous la forme d' une an-

²VS, p. 37

³*Ibidem*, *op. cit.*, p. 40

thropologie non critiquée de l'esprit mathématique⁴, Poincaré substitue une construction historique qui place l'analyse logique sous la perspective du fondement et l'intuition sous celle, dynamique et actuelle, de l'invention. L'analyse est une validation rigoureuse de ce qui est établi par un effort intuitif potentiellement trompeur. Nous ne pouvons nous assurer de la validité d'une intuition que lorsque nous la rapportons aux corps des théorèmes connus, par la démonstration. Or, affirme Poincaré, les mathématiques ne sont pas déchirées entre ces deux pôles, mais elles consistent dans leur étroite imbrication : l'esprit d'analyse et l'esprit d'invention (ou de synthèse) sont tout aussi nécessaires à l'épanouissement des mathématiques telles que nous les connaissons. Poincaré semble cependant faire de l'intuition *sensible* l'élément par lequel, dépassant le simple moyen technique que l'analyse lui offre, le mathématicien peut procéder à l'invention. Il relève en effet à plusieurs reprises l'impossibilité de purger l'intuition, même la plus pure, de toute trace de son origine sensible : elle demeure pensée comme un voir⁵, une sensation dont l'analyse revient de droit à la métaphysique ou/et à la psychologie⁶. Encore faudrait-il savoir si cette faculté thaumaturgique porte sur la construction des concepts ou seulement sur le chemin, la méthode de leur résolution. Dans le contexte de la rivalité qui existe entre Poincaré et Hilbert, il semble que l'invention concerne plutôt, dans l'esprit de Poincaré, le mode de résolution d'un problème pour lequel les concepts sont de l'ordre du donné. L'analyse kantienne des mathématiques conduit elle aussi à privilégier l'intervention de l'intuition. Mais cette dernière est alors renvoyée à l'activité fondamentale des mathématiques : la construction de concepts, alors que chez Poincaré. C'est le sens de la référence qui est faite à Kant dans la suite de l'aporie qui ouvre *La science et l'hypothèse* :

”Sans doute, on peut remonter aux axiomes qui sont à la source de tous les raisonnements. Si on juge qu'on ne peut les réduire au principe de contradiction, si on ne veut pas non plus y voir des faits expérimentaux qui ne pourraient participer à la nécessité

⁴”On naît mathématicien, on ne le devient pas, et il semble aussi qu'on naît géomètre, ou qu'on naît analyste”, VS, p. 27

⁵Cf. VS, p. 29 : ”Chez nos étudiants, nous remarquons les mêmes différences ; les uns aiment mieux traiter leurs problèmes ” par l' analyse ” , les autres ” par la géométrie ” . Les premiers sont incapables de ” voir dans l' espace ” , les autres se lasseraient promptement des longs calculs et s' y embrouilleraient”

⁶”Reconnaîtrait-on avec un peu d'attention que cette intuition pure elle-même ne saurait se passer du secours des sens ? C' est là l' affaire du psychologue et du métaphysicien et je ne discuterai pas cette question”, VS, p. 39

mathématique, on a encore la ressource de les classer parmi les jugements synthétiques *a priori*. Ce n'est pas résoudre la difficulté, c'est seulement la baptiser" [31]

La solution, au moins provisoire, retenue par Poincaré pour penser le statut des axiomes, permet d'éviter l'écueil d'une simple opposition d'entendement entre l'analyticité pure de la non contradiction et la synthéticité insoutenable de l'expérience nue. Qu'est-ce, au fond, qu'un jugement synthétique *a priori* ? Dans la généalogie kantienne des jugements, que Poincaré semble revendiquer ici tout en s'en méfiant comme d'une simple étiquette, le jugement synthétique ajoute, au moyen du prédicat, une information qui n'est pas contenue dans la notion du sujet considéré⁷. Les jugements mathématiques sont, selon Kant, tous de cette sorte car ils procèdent par construction de concept :

"les propositions mathématiques sont toujours des jugements *a priori*, et non empiriques, puisqu'elles comportent la nécessité qu'on ne peut tirer de l'expérience⁸."

Poincaré semble retenir de la leçon kantienne l'idée selon laquelle l'acte qui consiste à énoncer un axiome relève d'une composition de concepts dont le lien n'est ni analytique ni purement dépendant de l'expérience sensible. A l'origine du raisonnement mathématique se trouve donc une activité de création dont la mise en évidence fera apparaître la vérité du conventionalisme mathématique de Poincaré. Le mathématicien n'est ni enchaîné à une machine déductive dont rien de neuf ne peut sortir, ni dépendant d'une leçon empirique dans laquelle ne figure aucune *nécessité*.

Nous sommes alors reconduits à la distinction qui doit subsister, dans les mathématiques, entre logique et géométrie, ou plutôt entre esprit d'analyse et tournure géométrique de l'intuition. Car cette distinction permet de comprendre toute la fausseté du paradoxe initial. Nous pouvons parvenir à rapporter tous les théorèmes aux énoncés primitifs dont ils tirent leur vérité - s'ils sont vraiment théorèmes. Mais le mouvement inverse, qui conduit le regard des énoncés primitifs aux propositions complexes des mathématiques,

⁷Kant écrit : "Dans tous les jugements où est pensé le rapport d'un sujet à unprédicat (...), ce rapport est possible de deux manières. Ou le prédicat B appartient au sujet A comme quelque chose qui est contenu dans ce concept (...), ou B est entièrement en dehors du concept A, quoiqu'il soit, à la vérité, en connexion avec lui." *Critique de la raison pure*, Introduction, IV, Paris : PUF (trad. Tremesaygues et Pacaud), 1968, p.37

⁸*Critique de la raison pure*, Introduction, V : "Dans toutes les sciences théoriques de la raison sont contenus, comme principes, des jugements synthétiques *a priori*.", op. cit., p. 40

supposent que soit le simple enchaînement analytique des propositions fasse place à une information supplémentaire. Le mathématicien, pour produire des théorèmes nouveaux, doit nécessairement passer par cette intuition qui est si difficile à définir. Poincaré recense en effet au moins quatre sens pertinents de l'intuition pour la compréhension de l'invention des mathématiques :

” Cette autre chose, nous n’ avons pour la désigner d’ autre mot que celui d’ intuition. mais combien d’ idées différentes se cachent sous ces mêmes mots ? Comparons ces quatre axiomes : 1. Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles ; 2. Si un théorème est vrai du nombre 1 et si l’ on démontre qu’ il est vrai de n plus 1, pourvu qu’ il le soit de n , il sera vrai de tous les nombres entiers ; 3. Si sur une droite le point c est entre a et b et le point d entre a et c , le point d sera entre a et b ; 4. Par un point on ne peut mener qu’ une parallèle à une droite⁹.”

Ces quatre axiomes relèvent de l'intuition parce que leurs objets sont mis en rapport par un effort imaginatif : on passe à la conclusion par la saisie d'une évidence qui ne doit rien à l'analyse, qui n'est que dissection, découpage ou destruction de ce qui est *actuellement donné dans un objet mathématique*. L'axiome 1 sera jugé, dans le Chapitre Trois, comme relevant d'un jugement analytique *a priori*. L'axiome 2 forme la charpente de notre Chapitre Un, qui aboutit à la mise en évidence du mode de raisonnement mathématique par excellence : la récurrence ou raisonnement par induction. L'axiome 3, comme le montrera le Chapitre Trois, appartient en propre aux axiomes de la géométrie, qui ne saurait être conçue, comme le fit Kant, sur le même plan que l'arithmétique.

” Nous avons donc plusieurs sortes d’ intuitions ; d’ abord, l’ appel aux sens et à l’ imagination ; ensuite, la généralisation par induction, calquée, pour ainsi dire, sur les procédés des sciences expérimentales ; nous avons enfin l’ intuition du nombre pur, celle d’où est sorti le second des axiomes que j’ énonçais tout à l’ heure et qui peut engendrer le véritable raisonnement mathématique. Les deux premières ne peuvent nous donner la certitude, je l’ ai montré plus haut par des exemples ; mais qui doutera sérieusement de la troisième, qui doutera de l’ arithmétique ?¹⁰”

L'intuition n'est donc pas une faculté unilatérale : construite dans les sens, dans le raisonnement inductif ou dans l'appréhension pure du nombre,

⁹VS, pp. 32-33

¹⁰VS, p. 33

elle doit être répartie également entre évidence (éventuellement trompeuse) et certitude apodictique. Son unité, elle la tient de l'imagination. Présente à toutes les étapes de la formation historique des mathématiques, l'intuition précède toujours la démonstration, celle par laquelle les mathématiques sont, dit Poincaré, entrées dans l'ère de la rigueur absolue. Sans intuition, pas d'invention. Sans logique, point de mathématiques. Poincaré parvient donc à construire un concept non ambigu de l'intuition, dont le dernier genre, celui de l'intuition du nombre pur, opère un lien permanent entre les champs connexes de la logique et de l'invention.

”L' intuition ne nous donne donc pas la certitude. Voilà pourquoi l' évolution devait se faire ; voyons maintenant comment elle s' est faite. On n' a pas tardé à s' apercevoir que la rigueur ne pourrait pas s' introduire dans les raisonnements, si on ne la faisait entrer d' abord dans les définitions. Longtemps les objets dont s' occupent les mathématiciens étaient pour la plupart mal définis ; on croyait les connaître, parce qu' on se les représentait avec les sens ou l' imagination ; mais on n' en avait qu' une image grossière et non une idée précise sur laquelle le raisonnement pût avoir prise. C' est là d' abord que les logiciens ont dû porter leurs efforts. Ainsi pour le nombre incommensurable. L' idée vague de continuité, que nous devons à l' intuition, s' est résolue en un système compliqué d' inégalités portant sur des nombres entiers. Par là, les difficultés provenant des passages à la limite, ou de la considération des infiniment petits, se sont trouvées définitivement éclaircies. Il ne reste plus aujourd' hui en analyse que des nombres entiers ou des systèmes finis ou infinis de nombres entiers, reliés entre eux par un réseau de relations d' égalité ou d' inégalité. Les mathématiques, comme on l' a dit, se sont arithmétisées¹¹.”

Les difficultés liées aux rapports de l'intuition à la rigueur sont aussi celles qui président aux relations de l'expérience à la forme *a priori* des axiomes. Poincaré, dans le Premier Chapitre de *La Science et l'Hypothèse*, fait porter son effort sur la nécessité de lever l'aporie qui existe, au moins en apparence, entre la *stérilité* d'une mathématique conçue comme un emboîtement analytique de syllogismes qui ne font que reproduire, par une suite d'identités, le $A = A$, et la nécessité de penser que ”le raisonnement mathématique a par lui-même une sorte de vertu créatrice et par conséquent qu'il se distingue du syllogisme” [32].

¹¹VS, p. 31

Chapitre 2

La grandeur mathématique et l'expérience

L'affirmation liminaire de ce chapitre peut paraître un brin provocante puisqu'elle semble nier à la géométrie la possibilité de donner du continu une définition. Le géomètre se sert de l'étendue et de l'espace comme d'un moyen, éventuellement construit de toutes pièces et séparé de l'espace psychologique, mais lié à lui par la nécessité de figurer la pensée au moyen d'une craie :

”Le géomètre cherche toujours plus ou moins à se représenter les figures qu'il étudie, mais ses représentations ne sont pour lui que des instruments ; il fait de la géométrie avec de l'étendue comme il en fait avec de la craie ; aussi doit-on prendre garde d'attacher trop d'importance à des accidents qui n'en ont souvent pas plus que la blancheur de la craie. ”[47]

De fait Poincaré tente de mener le regard de son lecteur vers une représentation authentiquement mathématique du continu, qui consiste à penser en fait des paquets de quantités discrètes que l'on rendra aussi petites que l'on voudra. Entre cette façon de poser le continu, qui a son origine dans la formalisation progressive, depuis 1684, du calcul infinitésimal, et la manière simplement figurative qui est celle du commun comme celle du géomètre, rien de commun :

”Les analystes n'en ont pas moins raison de définir leur continu comme ils le font, puisque c'est toujours sur celui-là qu'ils raisonnent depuis qu'ils se piquent de rigueur. Mais c'est assez pour nous avertir que le véritable continu mathématique est tout autre chose que celui des physiciens et celui des métaphysiciens. ”[48]

Poincaré utilise Dedekind pour montrer que la véritable notion du continu tient dans la divisibilité à l'infini, c'est-à-dire aussi dans la possibilité théorique

de réaliser des encadrements. Comment aurions-nous, ne serait-ce que l'idée d'un nombre incommensurable puisqu'aucune fraction ne peut en rendre compte? Seul un encadrement peut en définir l'existence comme limite de deux ensembles ouverts. Poincaré est au fait de la notion de coupure, utilisée par Dedekind et qui entre, de façon paradoxale pour qui n'est pas mathématicien, dans la définition du continu. Dedekind décrit en effet deux ensembles, $C1$ celui des rationnels négatifs et positifs dont le carré est inférieur à 2, et $C2$ formé de tous les autres rationnels. Le nombre qui n'existe ni dans l'un ni dans l'autre, et qui se trouve à leur coupure, est $\sqrt{2}$. Ainsi il devient possible de créer tout nombre dans \mathbb{R} . Si les deux sous-ensembles forment \mathbb{R} par leur réunion, s'ils ne sont ni vides ni disjoints et si on a la propriété suivante : tout élément de $C1$ est strictement inférieur à tout élément de $C2$ alors il existe un réel et un seul qui forme leur coupure. Comme le soulignent A. Dahan et J. Peiffer¹, c'est historiquement la première définition du continu mathématique.

Poincaré se sert par suite de la "loi de Fechner" pour montrer que la sensation ne peut donner aucune idée précise du continu, à tel point que l'exemple donné, celui de la sensation de traction, présente plutôt les aspects d'une sensation par sauts qualitatifs qui défient les règles de la transitivité.

La création du continu mathématique est distribuée en continu du premier ordre et continu du second ordre [52-55]. Le premier ordre est un continu formé par une loi d'addition indéfinie. Le second ordre poère dans les intervalles et se construit donc plutôt grâce à l'outil mathématique de la limite. L'allusion, p. 53, à la contradiction que les logicistes avaient mis en avant dans la théorie des ensembles paraît à Poincaré relever seulement d'un point de vue empirique. Dès lors que le concept de continuité s'applique à la contradiction liée au cardinal des ensembles infinis, cette contradiction disparaît, parce qu'un infini ne saurait être actuel : il est seulement potentiel.

Au moment de la rédaction de son ouvrage, Poincaré n'ap pas encore entamé la polémique qui l'oppose à Russell². Le paradoxe de Russell remet en cause, au moins en apparence selon Poincaré, une compréhension "kantienne" des mathématiques, c'est-à-dire celle qui rend le mathématicien auteur de théorèmes non analytiquement inscrits dans l'*alma mater* de la logique. On sait que Poincaré affirme avoir tranché le débat en faisant valoir le mauvais usage de la définition qui règne chez Russell : inclure le défini dans la définition, comme dans le cas du paradoxe de Russell, c'est ne rien définir, c'est donner une définition non-prédicative puisque soit défini, soit

¹Une histoire des mathématiques. Routes et dédales. Paris : Seuil, 1986, p. 206

²Les *Principles of Mathematics* ne paraissent qu'en 1903

un ensemble actuel le contenant intervient dans la définition. Le paradoxe de Russell³ est donc tout simplement un abus de langage.

Le cantorisme, dont l'erreur aura été, au fond, d'avoir introduit des entités indéfinissables sur fond de croyance en un concept d'infini actuel. Hilbert, qui suivait un programme logiciste dans lequel la logique n'asservissait pas les mathématiques mais leur était consubstantielle, devait nécessairement avoir recours à l'induction complète telle qu'elle est exposée au Chapitre Un.

C'est donc encore une fois par une faculté de l'esprit que se dévoile la nature des opérations mathématiques, cette faculté, qui préside à la construction d'un continu rigoureux, est celle de la création de symboles :

”En résumé, l'esprit a la faculté de créer des symboles, et c'est ainsi qu'il a construit le continu mathématique, qui n'est qu'un système particulier de symboles. Sa puissance n'est limitée que par la nécessité d'éviter toute contradiction ; mais l'esprit n'en use que si l'expérience lui en fournit une raison.

Dans le cas qui nous occupe, cette raison était la notion du continu physique, tirée des données brutes des sens. Mais cette notion conduit à une série de contradictions dont il faut s'affranchir successivement. C'est ainsi que nous sommes contraints à imaginer un système de symboles de plus en plus compliqué. Celui auquel nous nous arrêterons est non seulement exempt de contradiction interne, il en était déjà ainsi à toutes les étapes que nous avons franchies, mais il n'est pas non plus en contradiction avec diverses propositions dites intuitives et qui sont tirées de notions empiriques plus ou moins élaborées. ” [55]

C'est à partir de cette activité symbolique que Poincaré affirme la possibilité même des mathématiques. Le passage qui suit cette mise en forme rapide du continu mathématique parvient à séparer deux terrains fort distincts des mathématiques issues de la création du continu. En effet Poincaré aborde la question de la mesure en insistant une fois de plus sur son caractère de convention. Une fois que l'échelle ou l'intervalle élémentaire est fixé, il suffit d'appliquer à cette libre convention les règles du groupe commutatif à l'image de ce qui avait déjà été mis en évidence dans l'arithmétique élémentaire.

Cette remarque rapide sur la théorie de la mesure est immédiatement suivie par un approfondissement des possibilités offertes au mathématicien

³Soit A l'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes. A s'appartient-il ? S'il s'appartient à lui-même, alors il ne doit pas s'appartenir à lui-même. Et s'il ne s'appartient pas à lui-même, alors il doit appartenir à l'ensemble des éléments qui ne s'appartiennent pas eux-mêmes.

lorsqu'il manipule le continu : le premier et le second ordre n'épuisent en rien les possibles. Ces passages sont destinés à préparer l'envoi final du chapitre, dans lequel, après avoir montré l'établissement du continu physique à plusieurs dimensions au moyen de la coupure empruntée à Dedekind, Poincaré montre clairement que l'opération de mesure n'est nullement indispensable aux mathématiques.

”Il n'est pas toujours nécessaire que ces grandeurs soient mesurables et il y a par exemple une branche de la géométrie où on fait abstraction de la mesure de ces grandeurs, où on se préoccupe seulement de savoir par exemple si sur une courbe ABC, le point B est entre les points A et C et non de savoir si l'arc AB est égal à l'arc BC ou s'il est deux fois plus grand. C'est ce qu'on appelle l'Analysis Situs.

C'est tout un corps de doctrine qui a attiré l'attention des plus grands géomètres et où l'on voit sortir les uns des autres une série de théorèmes remarquables. Ce qui distingue ces théorèmes de ceux de la géométrie ordinaire, c'est qu'ils sont purement qualitatifs et qu'ils resteraient vrais si les figures étaient copiées par un dessinateur malhabile qui en altérerait grossièrement les proportions et remplacerait les droites par un trait plus ou moins courbe.

C'est quand on a voulu introduire la mesure dans le continu que nous venons de définir que ce continu est devenu l'espace et que la géométrie est née. ”[60]

Poincaré est l'un des protagonistes de la topologie moderne, cette branche des mathématiques dont l'objet principal est précisément le continu considéré sans aucun égard à la convention de mesure qui intéresse la géométrie ”ordinaire”.

Deuxième partie
Mathématiques (II)
L'espace

Chapitre 3

Les géométries non euclidiennes

C'est très logiquement que Poincaré aborde la question de l'espace en mettant en avant les nouvelles géométries. ; Celle, sphérique, de Riemann, ou celle de Lobatchevsky sont examinées succinctement dans le but avoué de poser à nouveau la question de la nature des propositions géométriques. Ainsi leur valeur de jugements synthétiques a priori est-elle questionnée en rapport avec le raisonnement par récurrence qui occupait le Chapitre Un.

”L'expérience nous apprend sans doute que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits ; mais c'est parce que nous n'opérons que sur des triangles trop petits ; la différence, d'après Lobatchevsky, est proportionnelle à la surface du triangle : ne pourra-t-elle devenir sensible quand nous opérerons sur des triangles plus grands ou quand nos mesures deviendront plus précises ? La géométrie euclidienne ne serait ainsi qu'une géométrie provisoire.

Pour discuter cette opinion, nous devons d'abord nous demander quelle est la nature des axiomes géométriques.”

Sont-ce des jugements synthétiques a priori, comme disait Kant ?

La référence à Kant, directe cette fois, est la seule mention du philosophe dans tout l'ouvrage. Nous devons donc maintenir tout à la fois que Poincaré prend chez Kant une certaine détermination du synthétique a priori, mais qu'il ne le fait pas en historien des concepts. Le sens du syntagme ”jugement synthétique *a priori*” qui convient le mieux à l'usage que Poincaré en fait serait : jugement universellement nécessaire, étant entendu que l'élément *synthétique* est destiné à répondre aux accusations de stérilité analytique des mathématiques, et que l'élément a priori désigne moins l'activité pure de l'esthétique transcendantale qu'une simple opposition à l'origine expérimentale des concepts mathématiques. L'argument de la réfutation s'ap-

puie sur le caractère de clarté qui devrait s'attacher à des jugements *a priori*. Poincaré affirme, de façon assez surprenante :

”Ils s'imposeraient alors à nous avec une telle force, que nous ne pourrions concevoir la proposition contraire, ni bâtir sur elle un édifice théorique. Il n'y aurait pas de géométrie non euclidienne” [74]

Pour logique qu'elle soit, l'architecture des *Elements* d'Euclide est perméable à la substitution d'hypothèses. Le postulat incriminé dans la production de géométries dissidentes est une hypothèse plus qu'un axiome et on peut bâtir analytiquement à partir de sa négation un ensemble cohérent. La géométrie n'est donc pas universelle car son commencement est toujours le fait d'axiomes qui sont des définitions *déguisées* [76]. En tant que définitions, les axiomes de la géométrie sont institués, ils sont donc le produit de conventions. Selon Poincaré, la définition ne diffère de l'axiome que parce que l'une peut démontrer sa consistance dans un système de postulats, alors que l'autre ne demande qu'à être posé et admis.

Une notation décisive est celle qui renvoie au théorème de Lie. Ce dernier montre que le nombre de géométries garantissant le mouvement d'une figure ou d'un solide possède une limite supérieure lorsque le nombre de dimensions est égal à 3. Il n'y a donc pas une infinité de géométries dans l'espace qui permettent de traiter, à la façon de l'euclidienne, les phénomènes de mouvement.

Poincaré renverse alors l'axe d'analyse en demandant, avec une feinte conviction, si l'on peut réduire la géométrie à une science qui puise ses axiomes dans les sciences expérimentales. Le chapitre suivant répondra plus amplement à cette question, mais Poincaré s'attache dans l'immédiat à rendre compte de notre représentation la plus commune de l'activité géométrique, celle qui apparaît dans l'histoire des sciences. Il est en effet courant de considérer que l'objet de la géométrie, ce sont les solides et leurs propriétés dimensionnelles. De la même façon, une tradition mathématique qui culmine chez Descartes et Desargues fait de la géométrie projective une science qui s'est constituée à partir d'une observation des propriétés de la lumière :

”Les propriétés de la lumière et sa propagation rectiligne ont été aussi l'occasion d'où sont sorties quelques-unes des propositions de la géométrie, et en particulier celles de la géométrie projective, de sorte qu'à ce point de vue on serait tenté de dire que la géométrie métrique est l'étude des solides et que la géométrie projective est celle de la lumière.” [75]

Mais Poincaré rejette cet enracinement de la géométrie dans l'observation de la chose car, dit-il :

”Si la géométrie était une science expérimentale, elle ne serait pas une science exacte elle serait soumise à une continuelle révision. Que dis-je ? elle serait dès aujourd’hui convaincue d’erreur puisque nous savons qu’il n’existe pas de solide rigoureusement invariable.” [75]

Or en opposant ainsi le devenir erratique des protocoles et hypothèses expérimentaux à l’exactitude du théorème, Poincaré répond-il vraiment à l’objection qu’il vient de former ? La géométrie emprunte ses objets à l’expérience sensible du solide ou à la trajectoire du rayon lumineux, cela est indéniable. Nul ne contestera non plus la relative indépendance de la géométrie face aux modèles de comportements physique qu’elle a historiquement puisés dans la nature, par observation et mesure. Galilée, dans la Quatrième Journée des Discorsi, montre les limites de l’outil géométrique dans la compréhension des phénomènes mécaniques, nécessairement circonscrits à un horizon et soumis à une donnée qui ne permet que d’approcher les conditions idéales de géométrisation : la pesanteur des corps et l’impossibilité physique du mouvement inertiel. Poincaré affirme que l’expérience n’est donc que le guide qui opère, au sein de tous les axiomes, la fonction de crible :

”Les axiomes géométriques ne sont donc ni des jugements esthétiques a priori ni des faits expérimentaux.

Ce sont des conventions ; notre choix, parmi toutes les conventions possibles, est guidé par des faits expérimentaux ; mais il reste libre et n’est limité que par la nécessité d’éviter toute contradiction. C’est ainsi que les postulats peuvent rester rigoureusement vrai quand même les lois expérimentales qui ont déterminé leur adoption ne sont qu’approximatives.” [75]

Est-ce suffisant pour exclure radicalement toute définition de la géométrie comme simple partie de la mécanique ? On pourrait parfaitement concéder à Poincaré sa définition du raisonnement géométrique comme construction de groupes continus de déplacements qui pavent un espace à l’origine indéterminé, et qui comprendrait l’espace euclidien en son sein au titre d’un simple cas, commode dans la plus grande partie de la cinématique, voire de l’électromagnétisme. Mais il semble que la nature des axiomes mêmes de la géométrie n’est pas véritablement tranchée. Ayant refusé aux principes de la géométrie le statut de vérité universelle, Poincaré ne parvient pas vraiment à fonder leur caractère purement rationnel ou conventionnel. En effet, on le voit, une pensée qui serait proprement conventionaliste ne verrait aucune utilité dans le tri sélectif des axiomes, pas plus qu’elle ne limiterait le sens de la géométrie à celles qui sont pensées sous le théorème de Lie.

Quoiqu’il rejette la ”vérité” ontologique supposée de la géométrie euclidienne, Poincaré ne parvient pas à isoler complètement la géométrie d’un fon-

dement physique. Il parvient cependant au moment décisif où il est capable de subvertir la tradition qui fait de la géométrie euclidienne le langage même de la nature. A bien y regarder, l'affirmation de l'absurdité de toute valeur de vérité accordée à la géométrie euclidienne renverse trois siècles de pratiques galiléennes : l'univers n'est pas écrit dans une seule langue mathématique qui lui renvoie l'ordre projeté de sa propre architecture rationnelle. Tout instrument est bon dès lors qu'il a été défini, qu'il s'accomplit selon les règles du raisonnement mathématique et dès lors, enfin, qu'il se trouve accommodé à un usage déterminé.

Chapitre 4

L'espace et la géométrie

La géométrie ne saurait être conçue comme un corps fondé sur des principes ayant valeur de jugements synthétiques *a priori*. La raison en est simple et constitue le cœur de ce Chapitre : il n'y a pas une seule géométrie, mais une infinité de façons de poser des relations dans un espace que l'on définit par commodité. Ainsi les axiomes de la géométrie n'expriment pas d'autre nécessité que celle de la commodité ou de l'usage. Tout comme l'arithmétique est révélée par le raisonnement inductif, la géométrie est le fruit de la notion de groupe continu. Poincaré a travaillé à la caractérisation du groupe euclidien dans son ouvrage intitulé *Sur les hypothèses fondamentales en géométrie*. C'est en géométrie que le choix des axiomes se montre sous son véritable visage : ils sont des hypothèses qui ne sont ni des jugements expérimentaux, ni des jugements analytiques, ni des jugements synthétiques *a priori*. De sa traditionnelle proximité avec l'espace de la perception psychologique, l'espace euclidien a longtemps été considéré comme l'espace "vrai", celui qui permet à Kant d'identifier l'espace à un concept pur et *a priori* constitutif de la façon dont l'entendement fait entrer le divers dans la forme de la phénoménalité. Ce privilège, et le statut apodictique accordé à la géométrie dans toute l'histoire de la science occidentale, ne tient plus lorsque, à partir du détournement de l'un des postulats d'Euclide, il devint possible et pensable d'édifier d'autres groupes que celui de la géométrie d'Euclide.

Alors que le raisonnement inductif conduisait le regard vers une quasi faculté de l'esprit, enracinée dans la désignation d'un objet mathématique réellement nécessaire et *a priori*, la géométrie indique plutôt la voie dans laquelle le conventionalisme va s'engouffrer.

Newton avait une telle confiance dans l'unicité de la géométrie, qu'il la faisait dépendre directement de la science des mouvements, c'est-à-dire aussi d'une généralisation menée à partir de l'observation des phénomènes eux-mêmes.

La distinction leibnizienne entre le simple niveau des apparences phénoménales, règne de la géométrie, et celui des substances où la dynamique se comportait comme science des expressions réelles des formes substantielles, accréditait la constitution d'un espace fantômatique, réduit à l'expression d'un simple rapport entre les corps, et adéquatement renvoyé à son statut d'idéalité. Chez Leibniz, comme chez Newton, la géométrie est aussi unique que le cadre dans lequel les phénomènes sont jetés : le monde lui-même, tel que nos sens le perçoivent, est l'origine radicale, soit empirique, soit idéaliste, d'un concept unique d'espace correspondant à un genre unique de géométrie.

Kant, dans la période critique, radicalise l'approche leibnizienne de l'espace puisque cette idéalité devient un concept pur et *a priori* dont dépend

Ainsi se trouve définie, grâce à cette réciprocity, une classe particulière de phénomènes que nous appelons déplacements. Ce sont les lois de ces phénomènes qui font l'objet de la géométrie.

LOI D'HOMOGENEITE. – La première de ces lois est celle de l'homogénéité.

Supposons que, par un changement externe α , nous passions de l'ensemble d'impressions A à l'ensemble B, puis que ce changement α soit corrigé par un mouvement corrélatif volontaire β , et de façon que nous soyons ramenés à l'ensemble A.

Supposons maintenant qu'un autre changement externe α' nous fasse de nouveau passer de l'ensemble A à l'ensemble B.

L'expérience nous apprend alors que ce changement α' est, comme α , susceptible d'être corrigé par un mouvement corrélatif volontaire β' et que ce mouvement β' correspond aux mêmes sensations musculaires que le mouvement β qui corrigeait α .

C'est ce fait que l'on énonce d'ordinaire on disant que l'espace est homogène et isotrope.

On peut dire aussi qu'un mouvement qui s'est produit une fois peut se répéter une seconde fois, une troisième fois, et ainsi de suite, sans que ses propriétés varient.

Dans le chapitre premier, où nous avons étudié la nature du raisonnement mathématique, nous avons vu l'importance qu'on doit attribuer à la possibilité de répéter indéfiniment une même opération.

C'est de cette répétition que le raisonnement mathématique tire sa vertu ; c'est donc grâce à la loi d'homogénéité qu'il a prise sur les faits géométriques." [88-89]

Cette "loi" d'homogénéité réinstaura dans la géométrie ce que les principes ou axiomes avaient, dans un premier temps, mis au second plan. Car

l'espace dynamiquement onstruit par un groupe de déplacement, qui trouve donc dans l'expérience primitive du mouvement le fondement de son appartenance générale au raisonnement mathématique. Tout comme dans le raisonnement inductif en arithmétique, la géométrie consiste dans cette puissance de "répétition" indéfinie du même par laquelle, à son tour, elle construit le groupe continu de déplacement où Poincaré reconnaît la commune mesure des géométries euclidiennes et non euclidiennes. Car il semble que Poincaré n'a pas d'égard pour les géométries simplement analytiques développées par Riemann et par Hilbert. Seules comptent celles dans lesquelles le mouvement continu peut être représenté directement.

[En cours d'achèvement]

Chapitre 5

L'expérience et la géométrie

Cet ultime chapitre de la partie proprement mathématique de l'ouvrage insiste sur une partie de la réflexion déjà engagée autour de la géométrie. Il s'agit de la relation entre les principes de la géométrie et l'expérience. Il s'agit d'une partie seulement car, rappelons-le, l'élément principal de la thèse de Poincaré consistait dans le renoncement au caractère a priori des axiomes géométriques. La multiplication des géométries non-euclidiennes a eu pour conséquence brutale le renoncement à l'étroite alliance entre l'espace euclidien et le monde donné dans la perception. La révolution scientifique opérée par Galilée, si elle a bien eu lieu, supposait entre le monde et cette géométrie un rapport de convenance qui a littéralement façonné la physique mathématique classique. Par rapport aux époques antérieures, le siècle de Galilée, de Descartes et de Newton se distingue très nettement en ce qu'il affirme l'existence d'une structure objective, unique et géométrique dans laquelle les phénomènes peuvent être pensés selon des déterminations métriques (de *metron*, la mesure) qui se trouvent aussi être celles de l'espace où ils se meuvent.

L'expérience ne se rapporte pas à des principes géométriques mais à leur inscription dans la sensibilité, c'est-à-dire dans la perception grossière d'une matière sur laquelle une figure s'inscrit. Tout le Chapitre V est donc déterminé par la volonté de récuser toute tentative de penser la géométrie sur le mode des sciences expérimentales susceptibles d'essais, d'erreurs et de réfutation. Il s'agit en fait d'un développement en règle des indications contenues dans le Chapitre Trois.

Dans un premier moment, Poincaré s'attache à la l'idée d'une expérience cruciale qui permettrait de départager et de juger les géométries. La question de la parallaxe ne peut donc servir de point de partage entre les géométries à courbure nulle, positive ou négative. La géométrie riemanienne en effet, la plus générale et qui comprend celles d'Euclide et de Lobatchevsky comme des cas particuliers paramétrables, pose très clairement l'idée selon laquelle

l'espace n'est qu'un cas particulier des grandeurs de dimensions multiples. Il est à trois dimensions et, dans le cas euclidien, n'est qu'un contenant sans interaction avec son contenu. Riemann, dans son ouvrage *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*, publié en 1867, offre une géométrie qui pourrait éventuellement accepter l'inter-relation des corps et de l'espace physique qui les contient. Nous disposons donc, en fait, de deux corps de propositions dont l'un a servi pendant plusieurs siècles une représentation physique de l'espace à courbure nulle, et dont l'autre n'a pas encore, en 1902, d'usage déterminé en physique.

Aussi le jugement rassurant de Poincaré envers la géométrie euclidienne ne manque-t-il pas de piquant, puisque la physique qui va demander sa géométrie à Riemann vont paraître peu après l'ouvrage de Poincaré : il s'agit de l'article d'Einstein de 1905 sur "L'électrodynamique des corps en mouvement", d'une part, puis les développements radicaux que cette théorie de la relativité restreinte va avoir dans le cadre de la relativité générale.

"La géométrie euclidienne n'a donc rien à craindre d'expériences nouvelles." [96]

L'espace euclidien a, contrairement à ce que pense Poincaré, beaucoup de soucis à se faire puisque la métrique de l'espace est, dans la relativité générale, directement dépendante de la répartition des masses dans l'univers. L'espace physique de la relativité, continu à quatre dimensions, est décrit par un tenseur métrique et sa figure la plus intuitive, c'est un ensemble de surfaces courbes où la trajectoire de la lumière, ainsi que celle de tout corps se fait selon les géodésiques que les masses célestes créent dans le tissu de l'espace-temps.

Plus cocasse encore est le fait qu'il existe une observation cruciale qui a assis la théorie de la relativité : on a pu observer le fait que la lumière ne se déplace pas universellement en ligne droite lors d'une éclipse du soleil en 1915.

Pour autant, indépendamment de l'effet saisissant du contexte qui semble donner tort aux idées fort classiques de Poincaré, le succès de la Relativité vaut-il pour une condamnation du principe de lecture épistémologique selon lequel toute géométrie est indépendante des heurts et malheurs de la physique qui en fait usage ? La géométrie de Riemann existait à l'état de construction théorique bien avant de se voir investie du pouvoir de décrire l'univers relativiste. Poincaré lui-même, dans une conférence donnée sur l'avenir de la science physique, prend en compte les modifications engendrées par la mécanique nouvelle :

"Peut-être aussi devons-nous construire toute une mécanique nouvelle que nous ne faisons qu'entrevoir, où, l'inertie croissant

avec la vitesse, la vitesse de la lumière deviendrait une limite infranchissable. La mécanique vulgaire, plus simple, resterait une première approximation puisqu' elle serait vraie pour les vitesses qui ne seraient pas très grandes, de sorte qu' on retrouverait encore l' ancienne dynamique sous la nouvelle. Nous n' aurions pas à regretter d' avoir cru aux principes, et même, comme les vitesses trop grandes pour les anciennes formules ne seraient jamais qu' exceptionnelles, le plus sûr dans la pratique serait encore de faire comme si on continuait à y croire¹.”

La structure épistémologique élaborée dans *La Science et l'Hypothèse* demeure donc valable, même lorsque la physique a changé radicalement l'usage qu'elle fait des géométries disponibles. Contre l'inscription des axiomes géométriques dans le simple cadre des principes expérimentaux de la dynamique, l'exemple de la géométrie riemannienne est éclairant et Poincaré peut alors sans crainte réaffirmer que ni l'optique ni la mécanique classiques ne sont le terrain où s'exprime l'essence de la géométrie :

”Une relation géométrique peut remplacer avantageusement une relation qui, considérée à l' état brut, devrait être regardée comme mécanique, elle peut en remplacer une autre qui devrait être regardée comme optique, etc. Et alors qu' on ne vienne pas dire : mais c' est la preuve que la géométrie est une science expérimentale ; en séparant ses principes de lois d' où on les a extraits, vous la séparez artificiellement elle-même des sciences qui lui ont donné naissance. Les autres sciences ont également des principes et cela n' empêche pas qu' on doive les appeler expérimentales.

Il faut reconnaître qu' il aurait été difficile de ne pas faire cette séparation que l' on prétend artificielle. On sait le rôle qu' a joué la cinématique des corps solides dans la genèse de la géométrie ; devrait-on dire alors que la géométrie n' est qu' une branche de la cinématique expérimentale ? Mais les lois de la propagation rectiligne de la lumière ont contribué aussi à la formation de ses principes. Faudra-t-il que la géométrie soit regardée à la fois comme une branche de la cinématique et comme une branche de l' optique ? Je rappelle en outre que notre espace euclidien qui est l' objet propre de la géométrie a été choisi, pour des raisons de commodité, parmi un certain nombre de types qui préexistent dans notre esprit et qu' on appelle groupes. Si nous passons à la mécanique, nous voyons encore de grands principes dont l' origine

¹VS, 211

est analogue, et comme leur " rayon d' action " pour ainsi dire est moins grand, on n' a plus de raison de les séparer de la mécanique proprement dite et de regarder cette science comme déductive. En physique enfin, le rôle des principes est encore amoindri. Et en effet on ne les introduit que quand on y a avantage. Or ils ne sont avantageux justement que parce qu' ils sont peu nombreux, parce que chacun d' eux remplace à peu près un grand nombre de lois. On n' a donc pas intérêt à les multiplier. D' ailleurs il faut aboutir, et pour cela il faut bien finir par quitter l' abstraction pour prendre le contact de la réalité. Voilà les bornes du nominalisme, et elles sont étroites²."

Cette philippique lancée à la philosophie nominaliste de Le Roy, décrit adéquatement la position intermédiaire de l'épistémologie de Poincaré : entre empirisme et nominalisme, il existe un terrain conceptuel dans lequel la reconnaissance du caractère conventionnel des axiomes mathématiques ne constitue pas une réfutation de leur origine dans une structure naturelle, proprement humaine, du fonctionnement de l'esprit. De même la reconnaissance de la valeur des principes et axiomes dans les sciences expérimentales ne conduit pas nécessairement à faire des conventions mathématiques de simples hypothèses physiques devenues générales après avoir été formalisées.

Les conventions géométriques sont à l'image des conventions propres au système métrique et, affirme Poincaré, vouloir étalonner un principe géométrique, tel la ligne droite, à partir d'une propriété des corps, revient à ne rien dire :

"Il est donc impossible d'imaginer une expérience concrète qui puisse être interprétée dans le système euclidien et qui ne puisse pas l'être dans le système lobatchevskien, de sorte que je puis conclure :

Aucune expérience ne sera jamais en contradiction avec le postulat d'Euclide ; en revanche aucune expérience ne sera jamais en contradiction avec le postulat de Lobatchevsky. "[97]

Poincaré aborde la question par d'autres biais, ceux du principe de raison suffisante et du principe de relativité. De façon étrange, Poincaré ne développe à aucun moment de façon précise ce qu'il entend par la violation possible du principe de raison suffisante qui décrit classiquement l'équivalence de la cause et de l'effet. Sauf peut-être à considérer qu'il entre en jeu dans l'intervalle de temps qui sépare l'état initial d'un système et celui qui est le sien

²VS, 241

à un temps quelconque, seule le principe de relativité est ici analysé. Poincaré s'est penché sur les contradictions qui existent entre le principe de relativité et les équations de l'électrodynamique. En 1900 puis en 1905, il est l'auteur de deux articles qui tentent de remédier au problème du désaccord entre la troisième loi de Newton, sur l'action et la réaction, et la théorie des champs. En effet, lorsqu'un corps aimanté se déplace par rapport à un corps électrisé, on crée un champ électrique. L'inverse n'est pas vrai et l'un des dogmes de la physique classique est ici mis à mal. Moins nettement que Einstein, Poincaré va avoir recours à l'hypothèse, déjà soutenue par Lorentz, d'une contraction des corps soumis au mouvement terrestre. Car la question des anomalies de l'électromagnétisme, jointe à la démonstration expérimentale (par Michelson-Morley) d'une incidence nulle du mouvement de la Terre sur la vitesse de la lumière³. L'irruption de cette notion dans l'ouvrage montre que ce qui est nommé ici la "loi de relativité" est un invariant physique qui définit l'espace et qui doit être le point crucial où une théorie doit faire la preuve qu'elle est applicable, en quelque façon, au réel.

Poincaré place donc le principe de relativité au-dessus de tout soupçon, et il peut à son tour jouer le rôle de discriminant. Bien évidemment, Poincaré peut affirmer immédiatement que le principe de relativité est parfaitement respecté dans la géométrie euclidienne. Historiquement, c'est dans le contexte d'un espace euclidien qu'il a été utilisé pour définir l'essence du mouvement. Poincaré raisonne alors de cette façon : on pourrait considérer que si les expériences dans l'euclidien sont transposées dans le non-euclidien et qu'elles violent la loi de relativité, du fait de leur effectuation dans un espace à la courbure non nulle, doit-on en conclure à l'invalidité de ces géométries ?

Un principe invariant des sciences expérimentales peut-il décider de la vérité d'une géométrie ? Le raisonnement est vicié, car par définition, le principe de relativité s'applique à l'espace, quelle que soit sa géométrie. Espace, ici, euclidien ou pas, signifie la totalité des parties de l'univers. Quelle que soit l'allure étrange, et éventuellement complexe, des équations qui pensent l'invariance des lois par transformation ou translation dans un espace non euclidien, la loi de relativité n'y sera pas violée ou du moins : *aucune expérience ne pourra mettre en évidence cette violation* et encore moins la tenir pour une preuve de fausseté des nouvelles géométries. Sur ce point, l'interprétation par Einstein des transformations de Lorentz donnera raison à Poincaré. Ce dernier met à part un problème épineux, qui a occupé tant Huygens, Leibniz que Newton : le mouvement de rotation imprime une force à l'objet qui s'y

³Supposée constante dans l'éther, cette vitesse devrait, par rapport au mouvement de la Terre, subir la règle d'addition classique des vitesses. Il s'agit d'une autre entorse au principe de relativité qui est un cas particulier, cinématique, de la Troisième loi de Newton.

trouve soumis et semble indiquer non pas un mouvement relatif, mais un mouvement absolu. Leibniz en fait l'indice ou le symptôme d'une substantialité qui perce sous l'apparence géométrique de mouvement, Huygens tente de l'éliminer par une application stricte de la relativité classique et Newton utilise cette propriété pour fonder l'idée d'un espace absolu. Poincaré, quant à lui, fait l'impasse sur les implications de cet éventuel "vrai" mouvement dans le corps, renvoyant seulement à la Troisième Partie de son livre l'analyse de la réaction de Newton.

"Quoi qu'il en soit, cette difficulté est la même pour la géométrie d'Euclide et pour celle de Lobatchevsky ; je n'ai donc pas à m'en inquiéter et je n'en ai parlé qu'incidemment.

Ce qui importe, c'est la conclusion : l'expérience ne peut décider entre Euclide et Lobatchevsky. "[100-101]

L'expérience que l'on pratique à l'égard des propriétés des corps est tout simplement sans rapport avec la nature de l'espace dans lequel ces corps sont plongés. Pour le prouver, Poincaré met en œuvre l'analyse d'expériences tendant respectivement à prouver la fausseté puis la vérité de l'espace euclidien. C'est que les valeurs de vérité ou de fausseté ne sont pas appropriées pour penser un système tel qu'une géométrie consistante.

La bipyramide a ses sommets sur une sphère : A, B, C, D, E, F forment un hexagone régulier sur l'équateur et G et H sont les deux pôles. Le triangle α , β , γ est donc rectangle isocèle avec l'angle droit en γ , et il est égal à chacun des triangles AGO, AHO, etc qui ne sont pas des faces : le sommet O est le *centre* de la bipyramide. En géométrie euclidienne les faces de la bipyramide sont des triangles isocèles de base R et de côtés $R\sqrt{2}$. Mais en géométrie hyperbolique les faces peuvent être des triangles équilatéraux.

La notion décisive ici est celle de "propriété géométrique". Tout l'exemple n'a en effet pour but que de montrer qu'à aucun moment nous ne sommes sortis d'une manipulation des corps insérés dans un espace muni de ses lois. Jamais il n'a été question d'atteindre les propriétés de l'espace, seulement celles des corps.

Le "Supplément" n'est destiné qu'à préciser davantage la compréhension que nous devons avoir de l'objet désigné dans le langage courant par le terme "point". Cette reconstruction rationnelle en termes de classes aboutit à la notion de groupe, et plus particulièrement à ces géométries décrites par le filtre du théorème de Lie : celles qui sont fondées par les groupes de déplacement. C'est alors que l'expérience, et singulièrement le corps, opère le choix d'une géométrie adaptée aux besoins de la représentation courante du point. Ce processus s'accomplit, chez Poincaré, dans une notation historico-anthropologique qui accentue la condition de commodité qui préside à l'entrée

de la géométrie dans les pratiques :

” *L’expérience ancestrale.*

On a dit souvent que si l’expérience individuelle n’a pu créer la géométrie, il n’en est pas de même de l’expérience ancestrale. Mais qu’entend-on par là ? Veut-on dire que nous ne pouvons démontrer expérimentalement le postulatum d’Euclide, mais que nos ancêtres ont pu le faire ? Pas le moins du monde. On veut dire que par sélection naturelle notre esprit s’est *adapté* aux conditions du monde extérieur, qu’il a adopté la géométrie *la plus avantageuse à l’espèce ; ou en d’autres termes la plus commode*. Cela est tout à fait conforme à nos conclusions, la géométrie n’est pas vraie, elle est avantageuse. ”[108]

Il a fallu une explicitation rigoureuse du conventionalisme de Poincaré pour parvenir à cette conclusion doublement renversante : d’une part la valeur de vérité n’est pas pensée ici en fonction de la consistance propre à la géométrie. Une géométrie qui n’est pas vraie n’en demeure pas moins un laboratoire de la preuve. D’autre part l’abandon de la valeur dominante du modèle géométrique comme fondement du vrai en philosophie naturelle ne signifie pas la perte du sens rationnel qui s’attache à la forme scientifique en général. Poincaré n’est pas un sceptique. Le conventionalisme, dont la première conclusion est de séparer la géométrie de tout jugement extérieur, prépare en fait le terrain à sa pleine expression dans les sciences de la nature.

Troisième partie

Physique (I)

La force

Chapitre 6

La mécanique classique

Poincaré aborde la notion générale de force après avoir examiné les mathématiques puis la géométrie. L'orientation générale de l'ouvrage devient plus claire : du général vers le particulier, Poincaré est à la recherche du lieu rationnel où passe la frontière entre l' *a priori* et l'expérience.

Dans le vieux débat entre une science continentale rationaliste et une science britannique empiriste, dont les termes ont été fixés, par exemple, chez René Dugas¹, Poincaré incline à prendre pour acquise la compréhension de la mécanique comme une science expérimentale. L' "experimental philosophy", dont l'institution principale au XVII^e siècle est la Royal Society, culmine dans le Scholium Generale ajouté par Newton aux *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* : la science du mouvement est complètement fondée lorsqu'elle provient de l'observation. La mécanique de Newton, qui a produit le concept d'attraction universelle, considère comme des hypothèses, c'est-à-dire des propositions interdites en philosophie naturelle, les énoncés qui ne proviennent pas directement de l'observation, mais se présentent comme de simples suppositions rationnelles. L'ambivalence de la mécanique est repérable dans l'histoire même des traités de mécanique mais Poincaré ne s'en tient pas à un satisfecit accordé à l'empirisme. La mécanique apparaît en effet comme un langage qui, outre l'origine expérimentale de ses concepts, s'effectue au sein d'un réseau de pures conventions : l'espace absolu, le temps absolu, la fiction de la simultanéité ainsi que la collusion de la mécanique classique avec l'espace euclidien ne sont en effet que des éléments inessentiels, destinés à simplifier l'expression des concepts de la mécanique.

Admettant *temporairement* le temps absolu et ayant déjà par ailleurs effectué la critique de la géométrie euclidienne, Poincaré passe à l'analyse

¹ *La mécanique au XVII^e siècle*. Neuchâtel/Paris : Editions du Griffon/Dunod, 1954 et, surtout *De Descartes à Newton en passant par l'école anglaise*. 1953.

détaillée de deux notions centrales de la mécanique classique, en examinant à chaque fois leur nature, et en récusant leur *aprioricité*.

Le principe d'inertie

Poincaré peut aisément poser le problème. D'une part ce principe, dont la première formulation en bonne forme est due à Descartes, n'est évidemment pas de l'ordre des vérités universelles, c'est-à-dire, dans la langue de Poincaré, qu'il n'est pas *a priori*. Par une brève référence à la physique d'Aristote ainsi qu'au problème de l'*antiperistasis* qui a attisé l'intérêt et la critique des commentateurs du Stagirite depuis Jean Philopon, Poincaré fait usage d'un principe historiciste de lecture dont il n'est pas certain qu'il soit fondé en raison :

”Est-ce la une vérité qui s'impose à priori à l'esprit ? S'il en était ainsi, comment les Grecs l'auraient-ils méconnue ? Comment auraient-ils pu croire que le mouvement s'arrête dès que cesse la cause qui lui avait donné naissance ? ou bien encore que tout corps, si rien ne vient le contrarier, prendra un mouvement circulaire, le plus noble de tous les mouvements ? ”[113]

Nombre d'axiomes mathématiques n'ont cependant pas été inventés par les Grecs et sont, quoiqu'on en dise, aussi *a priori* qu'il est souhaitable. A cette première affirmation, qui ne fait pas l'objet d'une plus grande analyse, s'oppose immédiatement l'évidence du caractère non expérimental de l'inertie : qui a jamais pu, dans l'histoire, observer le mouvement inertiel dans les conditions de pesanteur qui sont celle de notre milieu ?

La reformulation du principe d'inertie se fait alors dans les termes de la dynamique :

”Je proposerai pour ce principe général l'énoncé suivant

L'accélération d'un corps ne dépend que de la position de ce corps et des corps voisins et de leurs vitesses.

Les mathématiciens diraient que les mouvements de toutes les molécules matérielles de l'univers dépendent d'équations différentielles du second ordre. ”[113]

Pour faire entendre cette généralisation et sa forme différentielle d'ordre 2², Poincaré imagine comme possibles d'autres lois de la nature, qui pres-

²La variation de l'état de mouvement conservé est une variation de vitesse, dépendante selon la loi d'inertie adoptée des deux paramètres d'ordre inférieur : position, vitesse des corps voisins.

crivent respectivement que la position (ordre 1³) puis l'accélération (ordre 3⁴) sont annexés à la notion de conservation d'état. La fiction suivante d'un système solaire où les astres se meuvent sans perturbations puis doivent réapprendre les lois de la mécanique par l'interposition d'une masse modifiant les orbites dans le sens de l'univers keplerien montre que, sans être expérimentale, la mécanique est extrêmement dépendante des données expérimentales qui remplissent notre connaissance du monde. La loi d'attraction de Newton, synthèse des trois lois de Kepler, ne doit pas s'abuser de la certitude qu'elle tire autant de l'observation que de l'histoire des concepts en physique :

”Eh bien maintenant, cette loi d'inertie généralisée, a-t-elle été vérifiée par l'expérience et peut-elle l'être? Quand Newton a écrit les Principes, il regardait bien cette vérité comme acquise et démontrée expérimentalement. Elle l'était à ses yeux, non seulement par l'idole anthropomorphique dont nous reparlerons, mais par les travaux de Galilée. Elle l'était aussi par les lois de Képler elles-mêmes; d'après ces lois, en effet, la trajectoire d'une planète est entièrement déterminée par sa position et par sa vitesse initiales c'est bien la ce qu'exige notre principe d'inertie généralisé.” [115]

La mécanique est expérimentale non pas parce qu'elle est tirée d'une observation immédiate du monde, mais parce que ses conventions sont largement dépendantes d'une croyance dans la reproduction à l'identique, stable, de tout ce qui entre dans notre connaissance empirique du monde. Comme toute loi expérimentale, la loi d'attraction peut être révisée. Une fois de plus, Poincaré gomme cette critique en affirmant que cette loi d'inertie a toutes les chances d'être conservée parce que les conditions expérimentales de son évictions seraient liées un bouleversement cosmologique majeur.

La mise en forme mathématique de l'observation des molécules [117] nous reconduit, par une manipulation *ad hoc* qui n'est pas du même ordre que celle qui avait lieu en astronomie. Poincaré suppose qu'en astronomie le principe d'inertie est vérifié expérimentalement parce que les corps en interaction se voient et obéissent visiblement à une différentielle du second ordre. En physique, la possibilité de faire intervenir des variables cachées permet à tout moment de retrouver la loi d'inertie généralisée.

³La loi de mouvement provoque alors une variation de la position, i.e. une vitesse, dépendante des paramètres de position des corps voisins.

⁴La variation de l'accélération est alors dépendante des trois paramètres d'ordre inférieur : position, vitesse et accélération des corps voisins.

Or, d'une part, Poincaré ignore que l'astronomie même va avoir recours à ces sortes de subterfuges pour parvenir à déduire de certaines vitesses aberrantes d'objets célestes considérables, l'existence d'une masse cachée. Et d'autre part, les subterfuges par lesquels on revient à l'énoncé de principes connus en supposant théoriquement des entités non observées (ou non observables) sera d'un grand secours dans la recherche des particules qui va animer la microphysique théorique. Ce que Poincaré semble considérer comme une faillite du principe même de la science expérimentale, non vérifiable et ouverte à tous les accommodages, est en fait le ressort théorique le plus fécond d'une physique que Poincaré ne connaîtra pas, ou dont il entrevoit les prémisses en les balayant d'un revers de main⁵.

La loi de l'accélération

Poincaré dénonce ici tout effort vers une compréhension des lois de la mécanique comme relevant authentiquement de l'expérience. La force et la masse ne peuvent être regardées que comme des définitions, c'est-à-dire "des coefficients qu'il est commode d'introduire dans les calculs"[123]. Cette nature transparait dans l'énoncé même de la loi d'accélération, $F = m\gamma$ ou, comme l'écrit Poincaré de façon liminaire :

"L'accélération d'un corps est égale à la force qui agit sur lui divisée par sa masse." [117]

L'intention première d'une définition en physique est de servir à la mesure de ce dont elle est l'objet. C'est en ce sens que Poincaré critique Kirchoff et Andrade, physiciens dont les noms se sont perdus, pour leur anthropomorphisme plus ou moins assumé. Dans la mesure où nous sommes incapables de donner un contenu expérimental à l'ensemble des notions qui entrent dans l'explication de la loi d'accélération, on peut effectivement dire avec Poincaré que le fait physique de la variation de vitesse d'un corps dans le monde ne peut être expliqué que par un enchevêtrement de définitions qui ne peuvent se prévaloir du titre de lois expérimentales que dans la mesure où la physique connaît des états pseudo-isolés, à peu près abstraits de l'influence des corps extérieurs, presque abstraits du monde :

"Cette condamnation trop rapide serait injuste. Il n'y a pas, dans la nature, de système parfaitement isolé, parfaitement soustrait à toute action extérieure ; mais il y a des systèmes à peu près isolés.

⁵Cf. [137], Chapitre 7 : "On peut supposer que cette autre chose est la position ou la vitesse de quelque corps invisible ; c'est ce qu'ont fait certaines personnes qui l'ont même appelé le corps alpha, bien que nous soyons destinés à ne jamais rien savoir de ce corps que son nom. C'est là un artifice tout à fait analogue à celui dont je parlais à la fin du paragraphe consacré à mes réflexions sur le principe d'inertie. "

Si l'on observe un pareil système, on peut étudier non seulement le mouvement relatif de ses diverses parties l'une par rapport à l'autre, mais le mouvement de son centre de gravité par rapport aux autres parties de l'univers. On constate alors que le mouvement de ce centre de gravité est à peu près rectiligne et uniforme, conformément à la troisième loi de Newton.

C'est là une vérité expérimentale, mais elle ne pourra être infirmée par l'expérience "[124]

Il ne saurait y avoir de vérification expérimentale complète. La physique est essentiellement fondée dans des observations partielles que seule la pratique d'une induction sauvage et la ferme croyance dans la représentativité de nos expériences limitées permet d'étayer. L'apparent jeu destructeur qui pousse Poincaré à fragiliser la certitude que nous plaçons spontanément dans des notions physiques extrapolées d'un anthropomorphisme à peine voilé, n'a qu'un seul but. Poincaré le révèle à la fin de ce chapitre, en opérant un retour sur la nature conventionnelle de nos idées mécaniques.

"La loi de l'accélération, la règle de la composition des forces ne sont-elles donc que des conventions arbitraires? Conventions, oui; arbitraires, non; elles le seraient si on perdait de vue les expériences qui ont conduit les fondateurs de la science à les adopter, et qui, si imparfaites qu'elles soient, suffisent pour les justifier. Il est bon que, de temps en temps, on ramène notre attention sur l'origine expérimentale de ces conventions. "[128]

Ni *a priori*, ni expérimentales, les lois de la mécanique sont essentiellement placées sous le signe d'une origine anthropologique. Le continu mathématique puisait lui aussi ses origines dans cette notion de groupe de déplacement enraciné dans la pratique du mouvement vécu par notre corps. Mais en se mathématisant, le continu avait acquis cette dimension *a priori*, complètement définie, qui fait défaut à la force, à l'inertie comme à la masse.

Ainsi sous le terme de définition, où l'on reconnaît mathématiquement l'axiome et philosophiquement l'*a priori*, nous devons désormais ranger la catégorie des lois de la mécanique, inventées à partir d'une faculté limitée d'observation et forgées par libre convention dans le but de rendre commodément compte des déplacements effectivement mesurés que subissent tous les corps : des galaxies aux molécules.

Chapitre 7

Le mouvement relatif et le mouvement absolu

Le principe d'inertie a été formulé de façon correcte par Descartes dans les Principes de la Philosophie, Seconde Partie. énonce en effet à l'article 25 la nature du mouvement comme :

”le transport d'une partie de la matiere, ou d'un corps, du voisinage de ceux qui le touchent immédiatement, et que nous considerons comme en repos, dans le voisinage de quelques autres¹.”

Le physicien Christian Huygens fera de ce principe, dont il voit une expression tout aussi légitime chez Descartes que chez Galilée, un usage systématique, renonçant ainsi à toute fiction relative à la notion d'espace absolu. L'espace n'est qu'un rapport entre divers corps et tout mouvement peut ainsi être décrit selon une infinité de référentiels, correspondant dans le texte de Poincaré au rôle joué par l'”observateur”. Ainsi l'espace absolu de Newton ne peut avoir qu'une seule preuve, puisée dans la notion d'accélération, puisque cette variation de vitesse possède des effets dynamiques qui semblent indépendants du référentiel choisi. L'exemple utilisé par Poincaré dans l'enchevêtrement de cas hypothétiques qui structure ce chapitre est celui-ci :

”Si le ciel était sans cesse couvert de nuages, si nous n'avions aucun moyen d'observer les astres, nous pourrions, néanmoins, conclure que la terre tourne ; nous en serions avertis par son aplatissement, ou bien encore par l'expérience du pendule de Foucault.
”[131]

Le débat qui touche au caractère absolu de l'accélération, principalement dans le cas des mouvements de rotation des corps, très vif dans la période

¹*Pr.Ph.*, AT IX, 76

classique, change de sens dans notre texte, puisque ce que Poincaré vise dans la mise en relation du mouvement relatif et de la loi d'accélération $F = m\gamma$, c'est une confirmation de leur caractère conventionnel. Car si l'on peut se servir du principe de relativité pour démontrer la loi d'accélération, cette loi tirera du principe de relativité une part de sa propre nécessité, affirmée de façon liminaire².

Poincaré affirme :

”Il reste donc à voir comment on peut démontrer que les différences des accélérations ne dépendent que des différences des vitesses et des coordonnées, ou, pour parler le langage mathématique, que ces différences de coordonnées satisfont à des équations différentielles du second ordre.

Cette démonstration peut-elle être déduite d'expériences ou de considérations *a priori* ?

En se rappelant ce que nous avons dit plus haut, le lecteur fera de lui-même la réponse.

Ainsi énoncé, en effet, le principe du mouvement relatif ressemble singulièrement à ce que j'appelais plus haut le principe de l'inertie généralisé; ce n'est pas tout à fait la même chose, puisqu'il s'agit des différences de coordonnées et non des coordonnées elles-mêmes. Le nouveau principe nous apprend donc quelque chose de plus que l'ancien, mais la même discussion s'y applique et conduirait aux mêmes conclusions; il est inutile d'y revenir.” [130]

Ce principe généralisé est en effet de la même forme que celle du principe d'inertie généralisé et Poincaré relie simplement les paramètres qui entrent dans le principe de relativité à leur forme différentielle, indépendamment de son contenu exact. Or L'unité d'expression des coordonnées, des vitesses et des accélérations dans une équation aux dérivées d'ordre 2 est une simple *commodité* qui aurait pu trouver une autre expression si les conditions de leur expression avaient conduit les savants à trouver d'autres formes mathématiques d'apparence plus commodes. Pour montrer la pertinence de cette affirmation, dont dépend toute entière l'idée de convention selon Poincaré, la fiction évoquée plus haut sert de point d'appui. Quelle serait la physique d'un monde semblable au notre, mais dont le champ d'expérimentation et d'observation serait limité par rapport au notre ?

²”C'est là le principe du mouvement relatif, qui s'impose à nous pour deux raisons : d'abord, l'expérience la plus vulgaire le confirme, et ensuite l'hypothèse contraire répugnerait singulièrement à l'esprit” [129]

Sous le titre "L'argument de Newton", Poincaré se livre à une série de conjectures destinées à revenir sur le sens d'une expression mal formée et pourtant répandue : la Terre tourne. Cette digression, présentée comme telle, permet de donner une réponse à la question principale de ce chapitre qui est, une fois de plus : le principe de relativité généralisé est-il expérimental ou *a priori* ? Sans la dialectique habile qui lie les énoncés puisés dans l'expérience et les conventions qu'on en tire selon l'usage ou la commodité de leur emploi, la pensée reste prise dans l'opposition classique et stérile :

"dire que la terre tourne, cela aurait-il un sens ? S'il n'y a pas d'espace absolu, peut-on tourner sans tourner par rapport à quelque chose, et d'autre part comment pourrions-nous admettre la conclusion de Newton et croire à l'espace absolu ?" [131]

Toute la fiction qui suit n'est alors destinée qu'à la justification du caractère conventionnel mais non arbitraire des lois et principes. C'est le lien entre leur énoncé et les données observationnelles disponibles qui est mis en avant par cette fiction.

Les astronomes mis en scène par Poincaré ont un champ d'observation réduit à l'horizon terrestre, sans repères liés aux coordonnées polaires : les vitesses angulaires des astres mesurées par les longitudes célestes leur sont inaccessibles. Le postulat inaugural de leur astronomie est la fixité de la Terre (ainsi que, au titre d'une conséquence, sa position centrale). Comment expliquer alors les expériences qui conduisent à penser que la Terre se meut ?

La première solution consiste à "réaliser" des forces dont on connaît l'existence théorique et qui s'expriment dans des équations du premier et second ordre.

Poincaré signale une difficulté liée à cette physique géocentrée : elle doit admettre un mouvement du centre de gravité s'appliquant à tous les systèmes isolés qu'elle construit : or dans ce mouvement l'invariance relative n'est pas garantie. Une nouvelle fois il faut supposer réalisées des interactions liées aux attractions des parties de ce monde.

Tout cela ne surviendrait pas dans le cas d'une acceptation du mouvement de la Terre.

La conséquence logique de cette construction dynamique destinée à préserver l'immobilité de la Terre, c'est l'invention d'un substrat physique (éther ou matière subtile) qui propose une cosmologie des fluides. Ainsi Poincaré ne fait-il que dresser, de façon anhistorique, les conditions initiales de la science astronomique. L'erreur sur le système de Ptolémée, qui est dit être l'inven-

teur des "sphères de verre"³, ne masque pas l'intention générale : montrer que les conditions d'une expérience générale du monde détermine le contenu des postulats.

”

Ils s'en tireraient sans aucun doute, ils inventeraient quelque chose qui ne serait pas plus extraordinaire que les sphères de verre de Ptolémée, et on irait ainsi, accumulant les complications, jusqu'à ce que le Copernic attendu les balaye toutes d'un seul coup, en disant : Il est bien plus simple d'admettre que la terre tourne. Et de même que notre Copernic à nous nous a dit : il est plus commode de supposer que la terre tourne, parce qu'on exprime ainsi les lois de l'astronomie dans un langage bien plus simple ; celui-là dirait : Il est plus commode de supposer que la terre tourne, parce qu'on exprime ainsi les lois de la mécanique dans un langage bien plus simple.

Cela n'empêche pas que l'espace absolu, c'est-à-dire le repère auquel il faudrait rapporter la terre pour savoir si réellement elle tourne, n'a aucune existence objective. Dés lors, cette affirmation : la terre tourne , n'a aucun sens, puisqu'aucune expérience ne permettra de la vérifier ; puisqu'une telle expérience, non seulement ne pourrait être ni réalisée, ni rêvée par le Jules Verne le plus hardi, mais ne peut être conçue sans contradiction.” [133]

Tous ces effets complexes se normalisent en changeant le postulat. L'astronomie copernicienne n'est pas plus vraie du fait qu'elle affirme que la Terre se meut. Elle est simplement plus commode par rapport à l'ensemble des données observables. Et ce faisant, elle ne permet en rien de valider l'espace absolu de Newton.

Le second moment fait passer la conclusion précédente dans le champ de la mécanique. Dans un texte qui clôt la *Valeur de la Science*, Poincaré loue l'astronomie pour avoir joué le rôle historique de guide pédagogique : en habituant l'esprit à manipuler des grandeurs infinies et des hypothèses littéralement paradoxales, elle a permis que se dégage l'activité scientifique dans son ensemble. Si nous admettons qu'il est plus commode d'être copernicien, pourquoi ne pas admettre que nos postulats en mécanique aussi relèvent d'une conduite pragmatique de cette sorte ?

L'expérience concrète impose d'adopter une loi de calcul des distances fondée sur des équations dépendantes non pas des coordonnées et de leur

³Poincaré songe ici en fait à toute l'astronomie antique ainsi qu'à l'auteur de la doctrine des sphères homocentriques, Eudoxe.

dérivées premières, mais de ces coordonnées et de leurs dérivées secondes. Il faut donc utiliser des équations différentielles du troisième ordre pour en donner une expression aisément calculable. Ce manque de solidarité entre coordonnées (principe d'inertie), vitesses (principe de relativité) et distances est-il choquant ?

Revenant à une fiction, Poincaré montre que les astronomes quasi aveugles, qui n'ont en leur possession que des mesures de distances spatiales. Afin de déduire des trajectoires, il ne suffit pas, dit Poincaré, de dériver à partir des distances. Il faut une loi de composition des accélérations qui appartient à la "constante des aires", i.e. à la seconde loi de Kepler.

Le raisonnement se subdivise alors à la façon des branches d'un algorithme logique.

1. La constante des aires est accidentelle. L'exemple donné est celui de la période orbitale terrestre, qui relève d'une contingence initiale. Que la Terre soit située à cette distance et possède cette période ne saurait relever que du hasard.

2. La constante des aires est essentielle. Poincaré évoque ici la loi newtonienne $F = \frac{mm'}{r^2}$ dans laquelle l'exposant est déterminé d'une façon interne, analytique, comme appartenant à la loi elle-même.

Il suffit de se reporter au Chapitre 6 pour comprendre que la constante des aires n'est liée qu'à une distribution éventuellement révisable des masses célestes connues elle est accidentelle. Dans la fiction créée par Poincaré, les astronomes ne peuvent être condits qu'à une seule conclusion : cette constante est essentielle. Cette situation est par ailleurs celle des successeurs immédiats de Kepler, mais Poincaré n'en dit rien, car son propos relève moins de l'histoire des sciences que dans un essai de psychologie rationnelle de la création scientifique. Les contenus des équations sont donc strictement déterminés par l'horizon connu.

Le Chapitre 7 s'achève à travers l'examen des différentes façons d'interpréter l'introduction de la constante des aires. Les suppositions respectives d'un espace absolu ou d'un corps invisible fortement massif apparaissent alors pour ce qu'elles sont : des questions secondaires de langage.