Le symbolisme mathématique

Stéphane Gombaud, lycée Leconte-de-Lisle et IREM de la Réunion

Dans cette première partie de notre cours, nous allons parler des signes employés en mathématique, pour les besoins du raisonnement mathématique, du calcul ou de la démonstration.

Il est possible d'évoquer l'"écriture mathématique" mais les mathématiques se pratiquent aussi à l'oral. Il est également possible de parler d'une "notation mathématique", en insistant alors sur deux choses, la codification systématique voire mécanique d'une part et d'autre part la mémorisation, puisqu'une note ouvre la possibilité de retrouver certaines idées émises peut-être longtemps auparavant. Il est encore possible de parler de "symbolisme mathématique", en insistant sur le caractère évocateur des signes utilisés... Pi par exemple qui renvoie au **p**érimètre du cercle et qui pour nous, dans son élégante écriture grecque conserve un caractère de mystère... ce qui sied très bien à un nombre transcendant !

Ce cours est en fait le corrigé du test donné aux élèves de la Seconde 1 du lycée Leconte de Lisle. En une heure, chacun devait répondre à un panel de questions :

- Qu'est-ce qu'un signe ? Fournissez une réponse qui donne les détails nécessaires pour bien se faire comprendre.
- Quels signes utilisés par les mathématiciens connaissez-vous ? Pouvez-vous préciser leur origine ?
- Il existe une notation pour la musique. Existe-t-il une notation similaire pour la danse ? S'il n'en existe pas encore, faudrait-il en inventer une ?
- Dans <u>Dom Juan</u> de Molière, Dom Juan dit : "*Je crois que deux et deux sont quatre, Sganarelle et que quatre et quatre sont huit*". Transcrivez en symboles mathématiques la proposition de Dom Juan "*deux et deux sont quatre*". Y a-t-il plusieurs façons de le faire ?
- Est-ce que les propositions suivantes, "2+2 = 5" et "2+2 → 4" ont du sens ? Justifiez votre réponse.

I Qu'est-ce qu'un signe ?

11 Quelques réponses

Une belle définition, pour commencer.
"*Le mot "signe" est polysémique. En mathématiques, il désigne les différents symboles utilisés. Lorsque quelqu'un nous fait un signe, cela veut dire un geste pour attirer notre attention. Pour les gens superstitieux ou ayant des croyances, le signe devient un présage, un indice, voire parfois un miracle. Plus généralement, un signe peut-être un dessin, une trace, qui traduit une phrase, une expression ou un mot dans un domaine précis pour l'abréger. Le signe est alors une sorte de code*."
B. El.
Il y a bien quelques imprécisions et peut-être des formulations à revoir. Mais cette définition renvoie à une très grande variété de signes, en faisant d'une certaine manière le tour du problème ! Vérifions-le.

différents symboles utilisés en mathématiques	+ = (} ! "un cercle", "l'ensemble des entiers"
quelqu'un nous fait un signe	Mon ami lève le bras pour m'avertir qu'il est là au milieu de la foule
quelqu'un nous fait un signe	Un policier lève le bras pour dire aux

	automobilistes qu'ils doivent s'arrêter
un présage	Cinq corbeaux qui viennent de l'Est...
un présage, voire un miracle	Naissance d'un mouton à cinq pattes...
un indice	Nuages noirs : bientôt la pluie ! Où est mon parapluie ?
un indice	Une trace de pas dans la boue, signe pour quelqu'un " *ayant des croyances*", par exemple Robinson
un dessin, une trace, qui traduit une phrase, une expression ou un mot	Un panneau du code de la route
un dessin	Un hiéroglyphe
une trace	Une "trace écrite" !

Avons-nous oublié quelque chose ? Sans doute, car la famille des signes est à l'évidence une grande famille ! Pour l'être humain, tout ou presque fait signe ou peut faire signe.

Prenons une seconde définition. Belle, elle aussi !
"*Un signe est une invention de l'homme. Comme les lettres de l'alphabet (A, B, C, D..) de l'alphabet cyrillique, grec, les caractères chinois, arabes, cunéiformes, les symboles mathématiques. On parle donc ici de signes transmis à l'écrit. Chaque signe est particulier ; un signe peut exprimer un son* [onomatopée] *ou exprimer une idée. Un signe possède donc une certaine signification.*
Si un signe a une signification, c'est qu'il est destiné à être compris et communiqué. Les signes sont donc des outils de communication universelle créés par les hommes." (K. Ni)
Soit, cette définition est un peu plus confuse, mais elle donne à penser. Le signe est défini précisément comme invention et outil. Outil, de quoi ? De communication, **et** de signification !
Si l'on considère les exemples donnés, on voit effectivement que la plupart du temps les lettres isolées de l'alphabet communiquent quelque chose (une sonorité) et que les mots formés avec elles possèdent en outre une signification (qu'on ne connaît pas forcément ou pas totalement ; cas des mots écrits dans une langue étrangère ou des mots qui forment des phrases qu'on a du mal à comprendre). Il y a certes des contre-exemples, comme "à" préposition ou "y" adverbe de lieu (dans "il y va"), lettres isolées qui ont une signification. Ou encore "A", "B" quand la lettre indique qu'il s'agit d'une première partie, d'une seconde partie.
Mais si la distinction de la communication et de la signification est assez claire, l'opposition ne va pas de soi. Il faut revenir sur deux points.

a) D'une part il faut faire attention à ce qui a été dit "*un signe peut exprimer une idée*". Car si on a pris garde, il y a là le germe d'une opposition forte, entre l'expression et la communication. Je dis à mon ennemi "Arrête-toi immédiatement, si tu fais un pas de plus...", je lui communique un ordre, mais j'exprime aussi quelque chose, mon exaspération ou bien ma colère naissante. Quand je communique, je dis quelque chose qui le concerne directement, et qui a une traduction dans le monde, la frontière que je viens d'instituer. Quand je m'exprime, je dis quelque chose qui me concerne, qui vient de moi et n'a peut-être de véritable sens que pour moi. Mon ennemi peut voir mon émotion et s'en moquer, n'en pas tenir compte du tout. Ou en jouer, par exemple répondre à mon ordre, communiqué, en évoquant mon émotion, exprimée, "Calme-toi, tu ne vas tout de même pas me tuer".
Il est possible de généraliser. Dans un langage quelconque, il est possible d'utiliser les signes dont on dispose pour communiquer une idée ou bien pour exprimer une idée. Ce n'est pas la même chose. Dans le premier cas, on se tourne vers un destinataire et on renvoie à un état du monde, (présent, passé, futur, possible, impossible, imaginaire...), bref à un donné objectif. Dans le second

cas, les signes trahissent quelque chose de celui qui les utilise, révèlent bien quelque chose, mais quelque chose de subjectif.

b) D'autre part, l'idée de "*communication universelle*" doit retenir notre attention. En effet, si "*chaque signe est particulier*", en tant que signe matériel, il ne renvoie pas nécessairement à quelque chose de particulier. Si on appelle "signifiant" le signe dans sa matérialité, on peut appeler "référent" l'objet particulier qu'il désigne et "signifié" le sens universel que possède le signe. D'où le triangle : signifiant ["arbre"] référence [un arbre] signifié [l'idée d'arbre]. Si j'évoque le souvenir d'un arbre dans la cour de l'école, "Je jouais à l'ombre du platane", le référent n'existe peut-être plus (l'arbre trop vieux a été abattu), mais cela n'est pas gênant, car ma phrase peut être comprise par tous ceux qui savent ce qu'est un "platane". Le langage permet même d'évoquer des objets imaginaires, pour lesquels se pose un problème de référence, comme "l'actuel roi de France". De plus deux expressions différentes (ou plus) peuvent fort bien dénoter la même chose, avoir le même référent, comme "l'étoile du soir" ou "l'étoile du matin"... Vénus bien sûr. Le sens est différent, pas la référence (ou dénotation).
Sans aller plus loi on voit qu'il existe un problème de la référence. Problème valable pour les signes en général. On pourra ultérieurement se demander ce qu'il en retourne précisément des signes utilisés par le mathématicien.

12 Une réponse d'un philosophe qui est en même temps un logicien fameux et un des inventeurs de la sémiologie ("sémiotique" dans son propre langage), C. S. Peirce

Le signe est quelque chose qui exprime quelque chose qui vient de moi et communique à l'extérieur quelque chose d'autre, soit qu'il désigne un objet, soit qu'il signifie une idée ! Mais soyons un peu plus précis...
Commençons par une idée générale.
D'après Peirce, cité par Umberto Eco (Le Signe, 1988), un signe est "something which stands to somebody for something in some respect or capacity", "*quelque chose qui tient lieu pour quelqu'un de quelque chose sous quelque rapport ou à quelque titre*". Collected Papers, 2.228 (1931)
Quel est l'intérêt d'une telle définition qui met en mot d'une certaine manière ce que tout le monde sait déjà ? Cet intérêt n'est pas nul. En effet de la définition résulte qu'il faut cesser de concevoir le signe comme une chose qui existerait d'elle-même, indépendamment de quelqu'un qui le reconnaît et s'en sert d'une manière ou d'une autre, pour réaliser quelque chose.

Mais allons plus loin. Peirce qui adorait le nombre 3 et les triades distingue trois grandes familles de signes.

Icônes	Indices	Symboles
Chose ressemblant à une autre chose	Chose modifiée ou affectée par autre chose	Chose mise en rapport avec une autre chose de manière conventionnelle
Un portrait, une maquette	Une empreinte digitale, une girouette	Une croix rouge, un dessin de verre à pied sur un carton de déménagement

Les critères de Peirce sont rigoureux. L'icône est une chose considérée en elle-même, pour ce qu'elle est en elle-même. L'icône est monadique ou primaire. L'indice est une chose considérée en rapport avec une autre qui a du retentissement sur elle. L'indice est duel ou secondaire (on pourrait dire aussi "binaire"). Le symbole est comme l'indice mis en rapport avec une autre chose, mais par l'intermédiaire d'une loi, d'une convention si l'on préfère, mais en entendant par là un intermédiaire qui joue un rôle nécessaire dans la liaison. Le symbole est ternaire.

Voir les définitions de ces trois familles de signe, tirées des *Elements of Logic* (1903)
http://www.ac-grenoble.fr/PhiloSophie/logphil/textes/textesm/peirce1m.htm

Opérant d'autres oppositions, Peirce arrive en fait à distinguer dix types fondamentaux. Son inventaire des signes est alors complet, logiquement s'entend. Mais il est un peu trop complexe pour les besoins de notre enquête sur les signes mathématiques.
Pour préciser ces divers types, on peut néanmoins consulter divers documents sur le Net, par exemple le cours suivant :
http://www.signosemio.com/peirce/semiotique.asp

Si nous voulons réfléchir, pourquoi ne pas nous demander, juste après avoir répondu à la seconde question, à quelle catégorie appartiennent les différents signes mathématiques ? Sont-ce des icônes, des indices ou des symboles?

13 Lectures complémentaires sur les rapports du langage et de la pensée

Un mini cours sur le langage et les signes
http://www.etudes-litteraires.com/philo/langage.php
Et sur *Wikisources* un ensemble de textes classiques, de Descartes à Sartre, sur la problématique du langage.
Par exemple, ce petit texte d'Alain :
"*La langue est un instrument à penser. Les esprits que nous appelons paresseux, somnolents, inertes, sots, vraisemblablement surtout incultes, et en ce sens qu'ils n'ont qu'un petit nombre de mots et d'expressions ; et c'est un trait de vulgarité bien frappant que l'emploi d'un mot tout fait. Cette pauvreté est encore bien riche, comme tes bavardages et les querelles te font voir ; toutefois ta précipitation du débit et le retour des mêmes mots montrent bien que ce mécanisme n'est nullement dominé. L'expression prend alors tout son sens. On observera ce bavardage dans tous les genres d'ivresse et de délire. Et je ne crois même point qu'il arrive à l'homme de déraisonner par d'autres causes ; l'emportement dans le discours fait de la folie avec des lieux communs. Aussi est-il vrai que le premier éclair de pensée, en tout homme et en tout enfant, est de trouver un sens à ce qu'il dit. Si étrange que cela soit, nous sommes dominés par la nécessité de parler sans savoir ce que nous allons dire ; et cet état sibyllin est originaire en chacun ; l'enfant parle naturellement avant de penser, et il est compris des autres bien avant qu'il se comprenne lui-même. Penser, c'est donc parler à soi*."
http://fr.wikibooks.org/wiki/Philosophie/Langage

II Les signes utilisés par les mathématiciens

Voici une seconde question très ouverte, qui demandait de faire preuve de mémoire, voire de culture générale.
C'est une question qui pouvait donner lieu à une énumération d'exemples ou bien à la production d'une liste plus ordonnée, ressemblant davantage à un catalogue. Cette seconde façon de faire, taxinomique, est sans doute une bonne façon de faire.

Certains, ceux qui ne viennent pas en cours de mathématiques pour se tourner les pouces, n'ont pas oublié de mentionner le signe ≡ , signe assez étrange, dont ils ont donné le nom (signe de la congruence), et l'inventeur (Carl Friedrich Gauss).
Les Recherches arithmétiques (1801- Librairie Blanchard, 1953)

11 Ce qu'on voit sur une calculatrice scientifique

Les nombres

Les chiffres "arabes".

Notons l'existence de nombres singuliers. Comme le nombre Pi qui a son symbole propre. Et l'existence de divers signes qui servent à écrire des nombres, comme la virgule pour les nombres qui ne sont pas des entiers ou le signe – pour les nombres négatifs.

Les opérations

Les quatre opérations "fondamentales". Mais aussi d'autres opérations. Comme la racine carrée, la racine cubique, la puissance, l'exponentielle... un groupe avec ses opérations inverses, cos, sin tan...

Les autres signes

Ceux qui sont nécessaires pour donner du sens aux énoncés, pour former des propositions.
Le signe =
Les signes (et)

12 L'ensemble des signes utilisés en mathématiques

Les ensembles de nombres.
Les signes { et }
Les propositions descriptives, le signe d'existence pour les objets ou celui d'inclusion pour les ensembles.
Les opérations sur les ensembles, réunion, intersection, complémentation.

Les figures
Les diagrammes
Les tableaux

Surtout le mathématicien ne fait pas que calculer comme le fait la machine à calculer. Il lui arrive régulièrement de procéder à du calcul littéral, algébrique. Alors il recourt à des lettres pour désigner des variables ou des inconnues.

Considérons cet extrait d'un article consacré à l'invention des signes mathématiques par les mathématiciens arabes :
"*La palme d'or, en matière de notation symbolique, revient à Mohammad Ibn Musa al-Khwarizmi (780-850, Bagdad) qui fit un usage massif de la lettre initiale du mot "shaya" (chose en arabe), l'utilisant pour noter la variable ou l'inconnue dès 820.* (...) *C'est là une véritable révolution dans la notation.*
L'inconnue est complètement absente du langage naturel. L'usage d'un simple symbole, pour noter l'inconnue, élimine l'anaphore (le renvoi à un sujet) du langage. Au lieu de dire "le carré d'une chose ajouté à trois fois cette chose ajoutée à deux font trente-six, quelle est cette chose ?*" il suffira d'écrire "*chercher x tel que x^2 +3x+2 = 36*". Au lieu de se perdre avec la chose, on manipule sa représentation x avec beaucoup plus de simplicité. Le calcul verbal est très difficile à manier, car il est facile de perdre de vue les résultats à atteindre ou de faire la confusion entre les données et les résultats d'un problème.*"
http://www.ucam.ac.ma/fssm/rydarab/doc/communic/comhisma.pdf

Mais remarquons encore que si le mathématicien fait de moins en moins usage de la langue naturelle, cela ne veut pas dire qu'il n'en fait plus aucun usage !

13 Une invention permanente !

Ces signes nous apparaissent comme dotés d'une grande stabilité. Le signe " + " a remplacé d'autres signes, comme le P, signifiant "plus" ou d'autres plus vieux encore, comme celui qui avait cours en Égypte, , et qu'on trouve dans le papyrus Rhind.
Il n'y a guère de chance qu'on revienne un jour au signe égyptien. Ni d'ailleurs qu'on en change pour en adopter un autre (bien que cela se fasse dans certaines communautés juives intégristes, qui en utilisant un T inversé prolongent une coutume née au IXe siècle – partant au refus d'utiliser un signe qui a une valeur religieuse, la croix !).

Mais il s'agit bien d'inventions et de pures conventions. Bref de signes arbitraires. Leur valeur symbolique a progressivement occulté leur valeur iconique, valeur qui a eu son importance lors de l'invention, aux yeux de l'inventeur lui-même.

Le signe " = ", par exemple a une certaine élégance. Il est constitué de deux traits égaux. L'égalité de longueur des traits est iconique, mais la valeur du signe employé tous les jours est symbolique.
Une flèche (qui n'est pas un signe mathématique classique) ressemble à une flèche et garde toujours un peu de sa valeur iconique. Mais cette valeur n'est pas suffisante pour qu'un décodage objectif puisse avoir lieu. Que veut-on dire avec elle ? Il manque quelque chose... le partage de la loi, la connaissance de la convention qui associe au signe particulier telle idée particulière.

Prenons conscience du fait que ce travail d'invention des signes n'est toujours pas achevé ! Il ne l'est pas pour une raison de droit. Chaque génération a à redécouvrir les signes en usage, leur sens et les règles de leurs manipulations... Pour un élève de l'école primaire les signes les plus simples, à commencer par les nombres n'ont pas immédiatement de sens. Et ce n'est que très progressivement qu'il est possible de proposer aux élèves de nouvelles notations, permettant de résoudre de nouveaux problèmes.
Il n'est pas non plus achevé au sens courant du terme, puisque la recherche mathématique se poursuit. Mais bien souvent au lieu de dessiner de nouveaux signes, le mathématicien recycle d'anciens signes, leur donnant dans le domaine qu'il étudie un nouveau sens, c'est-à-dire de nouvelles règles opératoires pour de nouveaux objets. Ainsi, le signe "=" a-t-il reçu quantité de sens différents, dans des domaines comme l'analyse ou l'algorithmique.
http://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89galit%C3%A9_%28math%C3%A9matiques%29

III La variété des familles de signes, quelques illustrations

Penchons-nous donc sur l'inventivité du mathématicien qu'incarnent les symboles mathématiques.

31 Existe-t-il une notation pour la danse similaire à la notation musicale ? Une bonne réponse... mais fausse

"*A ma connaissance, il n'existe pas de notation pour la danse. Je pense qu'il faudrait en inventer une, car cela pourrait être utile dans le sens où si quelqu'un doit reproduire une chorégraphie, il serait heureux qu'il puisse la lire et la comprendre* [sur le papier] *au lieu d'apprendre pas à pas avec quelqu'un qui la connaît.*"

"*Il faudrait en inventer une...*" C'est tout l'intérêt d'une écriture qui est ainsi mise en valeur. A quoi sert un livre ? À reproduire une histoire sans avoir à l'apprendre de quelqu'un qui la connaît, pour,

éventuellement, après l'avoir apprise par cœur à la manière des rhapsodes, la transmettre à quelqu'un d'autre !
Et il faut bien voir que ce qui est en jeu est le passage à l'universel ! La notation de la danse, qui existe bel et bien permet de vaincre les barrières des siècles. Elle permet à un créateur de danses, un maître de ballet, un "chorégraphe", d'avoir une audience universelle. Sans avoir jamais mis les pieds à Buenos Aires ni n'avoir de professeur connaissant le tango je peux apprendre le tango si jamais je sais décrypter une "chorégraphie", une "cinétographie" !

Voir l'exposition temporaire de la Bibliothèque départementale à Saint-Denis. En particulier ce qui est dit des premières notations et du développement d'un projet plus "scientifique".

Mais les choses ne sont pas si simples. On peut en effet noter que certains danseurs – c'est même le cas de leur majorité – ignorent l'existence de cette notation des pas de danse, quand, en revanche, aucun musicien n'ignore l'existence de la notation musicale. L'apprentissage de la notation (le solfège) fait partie de la formation initiale des musiciens, pour des raisons assez évidentes.
Comment se fait-il que la notation de la danse n'ait pas eu ce succès et soit demeurée confidentielle ?

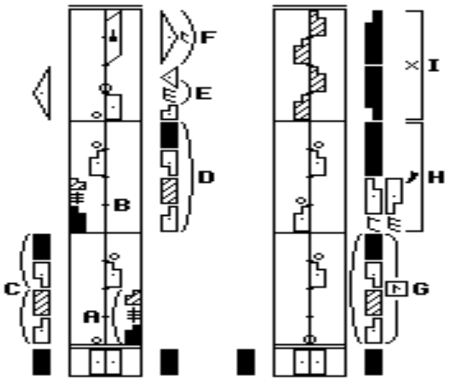
Certains ont semble-t-il eu une idée à ce sujet.
D'abord un élève a remarqué que la danse avait son lexique, ses mots et ses codes propres. "*Les danseurs utilisent un jargon particulier, des termes techniques désignant des pas, des positions ou des mouvements (plié, grand jeté, arabesque, développé, battement...)*" et qu'il y avait une rigueur dans la pratique de cet art, "*Il faut remarquer que la danse utilise des termes mathématiques pour les déplacements des pieds (première position, seconde, sixième, parallèle...)*". D'où la question ainsi formulée "*Pourquoi inventer une notation supplémentaire ? La pratique d'une discipline implique la connaissance de termes spécifiques, désignant les actions à accomplir. Le jargon des danseurs est universel, pourquoi s'encombrer avec des appellations supplémentaires et superfétatoires ?*"

Un autre élève a été un peu plus catégorique :
"*Non. Il faudrait en inventer une pour les différentes parties du corps qui doivent bouger* [et, bouger, elles le doivent toutes !], *pour chaque mouvement* [même un regard, un battement de cils], *pour le temps, le rythme et les pauses* [à l'instar de la musique], *et enfin pour les pas de danse*."
Sous-entendu, c'est impossible, cela fait trop de choses à représenter, à mesurer et à codifier ! Mieux vaut regarder une vidéo... ou assister à une démonstration ! Une notation est problématique, car ce à quoi on pense tout de suite (les pas de danse, les mouvements de jambes) ne constitue qu'une infime partie de ce qui fait qu'une danse est une danse ! Et on pourrait ajouter à la liste des choses à signifier l'émotion dégagée par les danseurs, puisque c'est un art. Décidément l'affaire est compliquée

Enfin un autre élève encore a indiqué qu'une notation pour la danse n'allait pas de soi si l'on veut un symbolisme efficace :
"*Je ne sais pas si cela existe. Si oui, elle permettrait de retenir par exemple une chorégraphie, mais plutôt sous forme de dessin* [notation iconique plutôt que symbolique]. *Il faut peut-être alors inventer une notation spécifique. Il faudrait trouver et apprendre des signes rapides et efficaces pour tous les pas de danse*."
Une notation de la danse qui ne soit pas une schématisation assez vague, cela ressemble à la quadrature du cercle, un défi impossible à tenir : la notation devant n'oublier aucun pas de danse (universalité, systématicité), mais aussi être simple, facile à reproduire et à apprendre, à utiliser (!

La complexité des danses demeure effectivement le problème majeur auquel une notation de la danse doit se confronter. Il est possible alors de vouloir tenir compte de cette complexité, en

valorisant la systématicité au détriment de la simplicité, ou au contraire de la réduire autant que faire se peut, en valorisant la simplicité au détriment de la systématicité.
Il est donc nécessaire d'opposer pour la danse deux types de notations, la notation "Marabout" (du nom des célèbres guides), pour tout danseur amateur, la notation "scientifique" comme la "cinétographie" de Laban, qui n'est guère qu'enseigné dans des lieux comme le Conservatoire de Paris, à destination d'experts.



Une notation type Laban
http://user.uni-frankfurt.de/~griesbec/LABANE.HTML

32 Les notations exotiques en mathématiques, rôle et intérêt de ces inventions

Les mathématiciens ont produit un certain nombre de notations spécifiques, aussi exotiques et curieuses, pour un profane, que les hiéroglyphes ou la notation cinétographique...
En voici deux exemples. La notation qui permet de décrire les lambrequins ; la notation qui sert à représenter tous les différents types de nœuds !

Les lambrequins
La première notation est comme la seconde au service de la description de tous les objets possibles de cette famille. Si l'on répertorie les mots du français, il est indéniable que leur très grande richesse n'épuise pas le réel. Prenons la famille des meubles, il existe un grand nombre de mots de meubles... mais il existe un plus grand nombre de types de meubles encore que de mots, car on ne cesse d'en inventer ! La parole doit alors utiliser des périphrases pour désigner certains objets. Soit l'ensemble des sièges, il y a des chaises, des fauteuils, des trônes, des tabourets, des bancs, des poufs, des strapontins, des bergères, des, mais aussi des "coffres qui servent de siège", des troncs qui sont des "bancs de fortune", des canapés-lits repliés. Et parmi les seules chaises, il y a les chaises en bois, en plastique, les chaises du Gol, les chaises de bistrot, les chaises pliables, les chaises à quatre pieds, à trois pieds, à deux pieds, à un pied, sans pied même ! On s'y perd !
Avec les lambrequins la variété n'est peut-être pas si grande, mais elle est plus grande qu'on ne pense habituellement ! Il suffit de se promener pour s'en rendre compte. Comment restituer cette richesse ? On peut les photographier pour en faire une banque de données. Alors on dispose de modèles de référence (le Cambuston 13 ou le Juliette Dodu 5). Mais on peut aussi remarquer que les lambrequins sont des motifs symétriques et qu'il y a un nombre limité de combinaisons de symétries possibles. Répertoriant a priori les formes possibles, les arrangements de symétrie possibles, on dispose alors d'un autre classement, systématique.
D'où les F1G et les F2M de Dominique Tournès !

Le principe de la notation de Tournès
http://nathalierun.net/passions/lambroquins/lambrdom.htm
et quelques autres images
http://nathalierun.net/passions/lambroquins/Lambroquins1.pdf

Les nœuds

C'est aussi très intéressant de s'appesantir sur cet exemple de notation. D'abord les nœuds sont une des techniques où l'inventivité des humains, de par le monde, a trouvé à s'exprimer. Tout le monde connaît les célèbres nœuds de marins.
Or les nœuds ce ne sont pas que des fils noués ce sont aussi et d'abord des idées. Des façons de nouer entre eux des brins, d'un ou de plusieurs fils. "Nouer" c'est faire des boucles, en faisant passer un brin parfois sous parfois sur un autre brin... C'est tellement "simple" (en réalité c'est binaire) qu'il semble possible d'écrire les nœuds en une notation codifiée assez facilement. "Facilement", ce n'est pas vraiment le cas. Mais avec de la rigueur, le mathématicien vient effectivement à bout de la difficulté. Il lui faut alors faire preuve d'une des qualités propres aux mathématiques, celle que louait Platon il y a plus de 2400 ans, l'abstraction. Car la notation des nœuds ne devient possible qu'à condition de faire abstraction des fils, considérés dans leur matérialité, et des grosseurs des fils, de leur longueur... Bref il faut idéaliser ces fils et se représenter abstraitement le monde des nœuds !

Avec ces nœuds abstraits, on passe des nœuds physiques qui servent à quelque chose dans la vie quotidienne à des exercices de topologie, ne donnant lieu qu'au développement d'une connaissance, avec ses démonstrations propres, c'est-à-dire ses déductions tirées des principes qu'on a préalablement posés.

Cf. Alexei Sossinsky. Nœuds. Genèse d'une théorie mathématique (Seuil, 1999)

Une autre piste de réflexion, le calcul des probabilités et ses notations.Piste que nous explorerons dans la seconde partie de l'année!

IV "*Je crois que deux et deux sont quatre, Sganarelle et que quatre et quatre sont huit*", Dom Juan dans Dom Juan de Molière

D'abord voyons à quoi rime cette question, assez curieuse, "Transcrivez en symboles mathématiques la proposition de Dom Juan ? Y a-t-il plusieurs façons de le faire ?"

Il est demandé une transcription. L'implicite de la question est qu'il existe deux types d'écritures. Et que si l'on connaît les règles de formation de l'une et celles de l'autre on peut passer de l'une à l'autre. Le langage ordinaire et les mathématiques sont comme deux langues qui sont étrangères l'une pour l'autre, **mais** il est possible de passer d'une à l'autre, d'un type de discours naturel à un autre, plus rigoureux, tout en conservant le sens. Du langage ordinaire vers les mathématiques, il s'agirait d'une transcription. Et inversement, des mathématiques vers le langage ordinaire, d'une traduction.
L'idée que le langage ordinaire s'oppose au langage du mathématicien est assez évidente. D'une part il n'est pas facile de transcrire l'une dans l'autre. D'autre part le langage ordinaire privilégie l'expression de mes idées, parce que les mots sont équivoques, en autorisant quantité de jeux de mots, tandis que le langage mathématique semble voué, peut-être exclusivement (mais ce n'est pas sûr), à la communication des idées, par le biais de ses symboles univoques.

Revenons à "*deux et deux sont quatre*". La transcription qui s'impose à l'esprit est "2 + 2 = 4".
Mais d'autres notations de la pensée de Dom Juan peuvent venir à l'esprit. En effet, on peut remplacer certains des signes par des signes équivalents.
Sur l'ensemble de la classe, huit élèves s'y sont refusé et n'ont pas donné d'autres transpositions. Trois ont en outre déclaré ne pouvoir proposer qu'une seule écriture, car il n'y en a qu'une seule de correcte.

En revanche, ceux qui avait moins de scrupules ou plus d'imagination ont écrit :
$2 + 2 = 2^2$
$\sqrt{2^2} + \sqrt{2^2} = 4$
(... personne n'a toutefois pensé à $\sqrt{2^2} + \sqrt{2^2} = 2^2$)
Parmi ceux qui se sont affranchis de tout scrupule on trouve des élèves qui ont osé proposé des choses comme ça:
$2 \times 2 + 4$
$2^2 = 4$
Et ils sont assez nombreux !
Un élève a visiblement privilégié l'imagination, faisant œuvre de poète, en inventant une notation connue de lui seul :
$2 ; 2 \rightarrow 4$
Enfin, un élève rusé a osé en gardant les signes qui viennent à l'idée, mais en inversant leur ordre. D'où la transcription symbolique suivante :
$4 = 2 + 2$
... il fallait y penser !

On le voit les signes se prêtent à un jeu de combinaisons, pour peu qu'on ait assez d'audace, préférant l'expression personnelle à la communication de quelque chose de décodable par tous. Ainsi quelques élèves ont goûté le jeu de la variation des écritures et utilisé un signe "[...]", par exemple, pour dire que la possibilité d'autres écritures reste ouverte.
$2 + 2 = 4$
$\sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$
$8/4 + 8/4 = 4$ [...]

Avons-nous bien fait le travail qui était demandé ? Oui. Et nous avons montré par ce biais la force du symbolisme mathématique, qui permet de transcrire le langage naturel dans les termes d'un langage formel. Mais il est possible et souhaitable de prolonger le travail de réflexion.
La question peut être retournée. Comment Dom Juan lirait-il "2+2=4". Pourrait-il à sa guise produire diverses lectures ?

Il dirait sans doute "*deux et deux sont quatre*".
Comment lit-on, en français courant, "2 + 2 = 4"? Ordinairement "Deux plus deux égale quatre" !
Où sont passés le "*et*" ainsi que le "*sont*" de Dom Juan ? Sur mille personnes interrogées dans la rue, quelques unes, sans doute emploieraient le verbe être. Mais d'autres lui préféreraient sans doute le verbe faire en disant "font". Et si l'on s'amuse à la variation, il ne serait pas tout à fait incongru de dire "Deux et deux produisent quatre" ; et on peut remplacer "et" par "ajouté à" ou "additionné à" ou bien choisir d'autres verbes qu'être et faire, comme donner, générer, causer, aboutir à, correspondre à. D'où une nouvelle tirade pour Dom Juan : "*Je crois que deux ajouté à deux donne quatre, Sganarelle et que quatre plus quatre correspondent à huit*" !

Et ou plus ; égale, sont ou font... cela ne veut pas dire exactement la même chose ! Le constat important est alors le suivant : aucune des traductions du langage mathématique en langage ordinaire n'est absolument satisfaisante. Et s'il s'agit de traductions, comme on peut le croire, ce sont de traductions utiles, mais pas parfaites dont il s'agit... et ce, bien que la formule retenue soit fort simple. On pourrait sans doute ajouter que toute traduction pose problème. Une bonne traduction de la phrase de Dom Juan en italien est possible, mais difficile et il y a toujours plusieurs manières de traduire. Faisons traduire par quelqu'un une phrase du français vers l'italien puis donnons à quelqu'un d'autre la tâche de traduire la phrase obtenue de l'italien vers le français. Reviendra-t-on à la phrase de départ ? Nulle traduction, vers le français, d'une bonne traduction italienne de la pièce Dom Juan ne reviendrait exactement au Dom Juan de Molière, au mot et à la virgule près ! La difficulté de la traduction tient donc moins à la proposition mathématique qu'à la nature de nos langues naturelles, dont la complexité est très grande.

La variabilité du français est celle d'un réservoir de mots aux multiples connotations et usages. "Donner" implique la générosité ; "générer", la fécondité ou un type de rapport qui est causal ; "composer", le travail du typographe qui assemble des mots avec des lettres en plomb... ou l'idée de paix (être de bonne composition, c'est ne pas mettre en colère).
"Egaler", c'est faire aussi bien que, c'est atteindre le même niveau que X ou le même score que lui.
La variabilité du symbolisme mathématique est en revanche purement celle d'une combinatoire, quand on remplace des choses qui sont équivalentes pour une raison ou une autre : 4 par 2^2.

On est tellement habitué à lire "2 + 2 = 4" comme "deux plus deux égale quatre" qu'on ne prête plus guère attention aux connotations du verbe employé. Et c'est tant mieux. Car on évite un problème assez délicat, sur lequel beaucoup de grands philosophes se sont penchés (Kant, Mill, Poincaré...), celui de la nature du jugement mathématique.

V "2+2=5" et "2+2 → 4"

Une langue se compose de signes, mais aussi de règles fixant ce qu'il est possible de faire avec les signes. Chaque langue a ses types de signes, mais aussi ses propres règles de construction. Pour simplifier on peut appeler mots les signes employés et grammaire l'ensemble des règles. Il existe des règles de grammaire fixant diverses sortes d'obligation ; il y a des interdictions et des obligations, mais aussi des permissions (ce qui n'est pas interdit est possible, mais pas obligatoire).
En tant que langage permettant la communication, les mathématiques ont leurs signes et familles de signes, mais aussi une grammaire ou syntaxe logique.

Pour ne pas être trop théorique, voyons ce qui était demandé.
D'abord, est-ce que "2+2=5" a du sens ? La difficulté est de répondre à la question posée et non pas à la question qui n'est pas posée... est-ce que c'est vrai ? Non, ce n'est pas vrai ! Mais quelque chose peut sans doute être faux et avoir néanmoins du sens.
Pour avoir du sens, une proposition mathématique doit seulement être construire rigoureusement, conformément aux règles de la grammaire des mathématiciens. Rien n'interdit de lier deux nombres quelconques a et b par un signe d'opération +. Et rien n'interdit de lier l'ensemble à un nombre c par un signe =. On a écrit quelque chose du type a+b=c ayant obtenu une proposition qui est, dit-on savamment, une équation. Celle-ci peut être vraie ou fausse. Tout dépend des valeurs de a b et c. Contrairement à ce que suggère l'intuition,"2+2=5" a autant de sens que "2+2=4", même si la première proposition est une équation fausse tandis que la seconde une équation vraie.

Voyons maintenant si "2+2 → 4" a du sens.
Le mathématicien construit des propositions élémentaires, par exemple des équations, mais aussi des propositions plus élaborées à partir de propositions élémentaires. Il utilise alors des signes spécifiques pour lier ces propositions, en suivant les règles qui s'imposent alors, car là aussi il y a des règles à respecter pour construire des propositions et en communiquer le sens. Le signe → est précisément un signe d'implication qui est utilisé pour lier entre elles deux propositions. Or ce que nous avons écrit relie non pas deux propositions, mais deux nombres, l'un s'écrivant sous la forme développée a+b. Cela n'a donc pas de sens de dire "deux plus deux implique quatre" ou de l'écrire sous forme "2+2=4". Car c'est commettre une faute de grammaire !
L'intuition est une nouvelle fois trompée. La proposition semble vraie, mais elle est en réalité mal formée. Elle est donc carrément dépourvue de sens. En mathématiques, pas de demi-mesure ! "2+2 → 4" n'est pas compréhensible à moitié si tout le monde "voit" ce qu'on voulait dire.

Notre intuition serait fautive ou plutôt nous aurions tort de transposer nos habitudes relatives au

maniement de la langue naturelle dans le champ des mathématiques.
Dans sa logique de langue naturelle, la langue française se satisfait d'approximations comme "deux plus deux implique quatre". Après l'avoir entendu, chacun comprend mentalement le verbe "implique" comme ayant le sens "être égal à", même si la phrase prononcée ne semble pas très bien dite. Et, par habitude encore, nous confondons ce qui est faux et ce qui n'a pas de sens. Quand je dis ""2+2=5 n'a pas de sens" je veux d'abord faire comprendre qu'il n'y a pas de raison de soutenir cet énoncé puisque la proposition mathématique "2+2=5" est fausse. Ce qui est insensé, à mes yeux, c'est de vouloir soutenir la proposition d'un geste de défi, avec un message de mauvaise foi du type "mais si, c'est vrai, puisque je vous le dis !".

Pour les curieux, un petit tour par *Wikipédia* permet de prolonger la réflexion, avec le mathématicien et philosophe Bertrand Russell ou le romancier George Orwell, auteur de 1984, et de découvrir quelques bons mots, comme ceux de Pierre Desproges ou de Houston Euler :
http://fr.wikipedia.org/wiki/2_%2B_2_%3D_5

Bonne lecture à tous !