

## PRÉSENTATION DU COURS SUR LA DÉMONSTRATION

*Stéphane Gombaudo, octobre 2007*

Dans le cadre d'un séminaire de l'IREM de La Réunion des années 2004-2005 et 2005-2006, j'ai élaboré un cours sur la démonstration, intitulé « La démonstration, une approche historique et critique ». Ce travail prend place dans la continuité d'une lecture critique des manuels de philosophie correspondant au nouveau programme des classes terminales réalisée de concert avec Evelyne Renaud, professeur de mathématiques au lycée Sarda Garriga de Saint-André. C'est aussi l'aboutissement de recherches sur des œuvres philosophiques hélas trop peu connues, particulièrement celle de John DEWEY, *La Logique ou la théorie de l'enquête*, et sur des matériaux d'histoire des sciences, par exemple la *Géométrie* de DESCARTES ou bien les *Recherches arithmétiques* de GAUSS. Ces œuvres ont été consultées de manière à comprendre le jeu d'oppositions existant entre la démonstration et la monstration... la "simple" monstration dirait-on sans doute un peu naïvement.

Non pas pour prévenir d'éventuelles critiques, qui sont les bienvenues, mais pour clarifier au maximum ma position, voici un avertissement aux lycéens, qui désirent étudier le thème de "La démonstration" et aux autres lecteurs, qui sont amateurs de réflexions sur la science contemporaine, puis une explication portant sur la progression mise en œuvre, avec l'exposition du plan de ce cours.

### **Avvertissement**

La démonstration est une argumentation qui dans son esprit ne sacrifie à aucuns des rites de l'argumentation, à aucunes des règles de la persuasion ! Ainsi se trouve exprimée l'aporie sur laquelle nous reviendrons sans cesse. Et voici indiqué notre programme de recherche : penser la démonstration dans sa singularité, singularité de ce qu'elle produit et singularité de sur quoi elle repose. Pour ceux qui désirent se lancer dans la lecture de ce cours et aller plus loin que son introduction, nous donnerons successivement deux avertissements, afin de mettre en garde notre éventuel public mais aussi d'éveiller un peu plus sa curiosité.

Ce cours consacré à la démonstration participe d'une volonté de s'appuyer sur l'histoire des sciences, en particulier des mathématiques. À cela, il y a une raison profonde. Sans des références au travail du savant il est, d'après nous, impossible de penser la démonstration scientifique qui n'est en fait rien de naturel. Celui qui voudrait penser la démonstration sans penser à partir d'exemples se condamne à des généralisations abusives. Il ne peut que reprendre des jugements glanés ici et là, quelques opinions droites et beaucoup de fausses car, sur le sujet de la démonstration, des philosophes parmi les plus renommés ont multiplié les erreurs, les imprécisions fâcheuses, les affirmations péremptoires trahissant leur dédain de la science.

Pour ceux qui préfèrent une autre démarche, celle de la doxographie ou de l'érudition, nous ne pouvons que conseiller d'autres cours. Mais alors nous nous permettons une mise en garde. En ligne ou dans des manuels scolaires, on trouve des exposés sur la démonstration qui sont strictement dépourvus de contenu. Un bon cours doxographique doit s'appuyer sur deux ou trois figures de la pensée, comme celles d'ARISTOTE, de PASCAL ou de BACHELARD, en s'appuyant sur leurs intuitions les plus profondes.

Nous tenons néanmoins à procéder différemment, parce que notre visée est moins de donner des informations pouvant être réutilisées dans une copie que de former à la démarche philosophique. De plus, notre expérience de professeur nous a convaincu que l'enseignement de la philosophie échoue lorsqu'il repose sur un contrat trop ambigu. Il ne sert à rien de donner Socrate en exemple aux élèves au début de l'année si l'on se comporte en classe durant tout le reste du temps comme un puits de science ! Concernant la démonstration, l'aveu libre d'ignorance "je sais que je ne sais rien" est presque indispensable. Ici comme ailleurs, il ne vaut toutefois pas comme excuse !

Il y a indéniablement des domaines dans lesquels nous sommes plus ignorants. Parmi ceux-ci, il y en a pour lesquels l'aveu d'ignorance est nécessaire. Puisque notre époque est celle du développement

prodigieux des connaissances scientifiques, il est normal que nous soyons de moins en moins capables de comprendre le travail du scientifique, que ce dernier œuvre dans un domaine pointu ou bien qu'il se consacre à des problèmes plus généraux (dans le cadre de la recherche dite "fondamentale"). Mais, suivant une de nos convictions les plus fortes, il n'y a aucune fatalité à l'élargissement du fossé séparant l'opinion publique de la connaissance scientifique ! La volonté de savoirs doit être valorisée, entretenue, récompensée. Les façons d'agir et de penser du scientifique peuvent être vulgarisées à différents niveaux, au début des études universitaires mais aussi plus tôt dans la scolarité, particulièrement au lycée, en classe de terminale. Une bonne vulgarisation adaptée aux élèves et aux étudiants doit pouvoir permettre la création d'une sorte de culture scientifique générale.

Certes la vulgarisation est sans doute insuffisante en soi. Mais si la science en général doit constituer un véritable sujet d'étonnement pour tous les citoyens, il est indispensable d'essayer de comprendre sa démarche à défaut de ses résultats, de réfléchir la nature de ses méthodes plutôt que ses "découvertes" ou inventions les plus spectaculaires. À ce titre la réflexion sur la démonstration, basée sur l'histoire des sciences mais ne s'y limitant pas, est un exercice qui par bien des aspects peut apparaître salutaire.

Le second avertissement porte ainsi sur l'utilisation de ce cours par un élève préparant le baccalauréat. Cet élève n'y trouvera pas d'explications magistrales de textes philosophiques pouvant "tomber" le jour de l'épreuve de philosophie. Il n'y trouvera pas de dissertation exemplaire. Quant au travail sur les textes, notre approche soulignera toujours la relativité des contenus. Les textes seront en effet rapportés systématiquement au questionnement qui les fonde, ce qui présuppose hélas des connaissances sur les auteurs et sur leur époque – ce qui n'est d'après les textes officiels pas requis des élèves.

Pour ce qui concerne l'exercice de la dissertation, les argumentations soulignant que la plupart des choses que nous croyons savoir de la démonstration sont en réalité erronées semblent préférables aux discours dogmatiques. Mieux vaut sans doute une copie constituée de trois parties montrant que nos idées premières sont naïves, fausses ou incomplètes que trois parties formant une belle progression sous le modèle thèse-antithèse-synthèse mais cachant mal ses approximations et ses jugements hâtifs. Notre but est d'inciter chacun à la réflexion personnelle.

### **Progression de ce cours – à lire par curiosité ou ne pas lire pour préserver le suspens**

Ce cours est destiné à inciter chacun à se lancer dans une réflexion sur la science, sa finalité et son fondement de sens. Les mathématiques sont au cœur de notre cours, mais celui-ci ne saurait être compris comme une sorte d'introduction à la philosophie des mathématiques. En effet notre projet est très limité afin que soit interrogée, "problématisée" du mieux que nous le pouvons, la rationalité du discours scientifique. De fait, il s'agit dans ce cours de faire réfléchir l'opposition de la démonstration et de l'argumentation. Cette opposition permet de se focaliser sur ce qui nous semble être l'essentiel, la distinction de l'universel, du particulier et du singulier.

### **Une approche critique**

Partant de l'idée que toute démonstration apparaît comme étant une argumentation d'un certain genre, nous nous efforçons de dégager la caractéristique essentielle de la démonstration. Montrer ce que le discours démonstratif n'est pas est plus facile que de cerner cette caractéristique. Ce n'est pas, comme dans un premier temps nous le suggère notre esprit, une sorte de talent voire de génie possédé par ceux qui produisent des résultats rigoureux, qui créent pour ainsi dire des vérités hors de cause pour l'éternité.

Une proposition démontrée est un théorème, doté de nécessité. Mais qu'est-ce que cette nécessité ? Un absolu métaphysique ? L'illustration de notre puissance intellectuelle ? Refusant cette sorte de réponse pour une série de raisons qui serait trop longue à exposer ici, notre point de vue est critique. La prudence nous pousse à refuser l'idée que les mathématiques manifestent un pouvoir divin en l'être humain. Point de platonisme donc, qui postulerait un pouvoir de dépasser les apparences et de saisir la réalité ultime des choses.

La nécessité vaut seulement dans le cadre d'un régime du discours qui rend explicites ses présupposés - ce qui constitue une axiomatique. Voué à la clarification du raisonnement, ce régime discursif n'est pas plus rigoureux qu'un autre ! La rigueur n'étant de notre point de vue rien d'absolu. Il correspond simplement à l'obéissance à un système de règles en toute connaissance de cause, contrairement au régime commun de la communication qui règle nos discours. Au quotidien, nous nous permettons des transgressions, par exemple en inventant de nouveaux mots, mais savons bien alors qu'il s'agit de refuser les règles existantes ! Ce qui n'est plus grave sans doute est que la plupart du temps nous ne voyons pas à quelles règles nous obéissons alors même que nous y obéissons ! Regardons l'enfant qui apprend à parler. Il imite, commet des fautes mais s'efforce de suivre des règles. Il obéit déjà à une grammaire, quoiqu'il n'ait eu strictement aucune leçon de grammaire... et fort heureusement car dans le cas contraire il n'y comprendrait rien comme de bien entendu.

### **Cohérence et consistance**

Pour le philosophe, la nécessité est le respect de principes logiques, le principe d'identité, celui de la non-contradiction ou celui du tiers-exclu. Les prémisses du raisonnement ne doivent pas être trahies, considérées une fois comme vraies, une autre fois comme fausses ! Ainsi, la cohérence des propositions assure formellement leur nécessité. En revanche, elle n'assure pas la compatibilité d'une proposition quelconque avec d'autres, également cohérentes mais à partir d'autres prémisses. La vérité nécessaire n'est pas suffisante ! La théorie de la démonstration doit se charger de la preuve de la non-contradiction du théorème avec tous les autres, déjà démontrés ou non.

Ce problème, problème de la consistance du discours, n'a pas toujours été perçu. Il est néanmoins crucial. Il a été tardivement aperçu par les mathématiciens eux-mêmes. Et il est prolongé par un autre, guère plus facile à aborder, celui de la possibilité de démontrer toute proposition vraie. Identifiant une question de fait et non de droit, nous avons le réflexe de penser que cela ne pose *a priori* aucun problème : certes toute proposition vraie n'est pas démontrée, mais cela ne veut pas dire que ces autres propositions pour lesquelles nous n'avons pas de démonstration soient indémonstrables. Soit, indubitablement, et on a raison de le souligner à notre époque qui a récemment reculé l'ordre du possible, avec ces mathématiciens utilisant des ordinateurs qui ont réussi à démontrer la vérité de conjectures très difficiles voire impossibles à démontrer d'une manière classique (cas fameux aujourd'hui de la conjecture de Kepler ou du théorème des quatre couleurs).

Mais il faut prendre garde à ce que nous avançons. Si relativement à ces propositions incertaines, nous n'avons pas de raisons d'infirmer la possibilité de tout démontrer, nous n'avons symétriquement rien qui suffise à l'affirmation contraire. Est-ce donc un faux problème ? Nous le souhaiterions pour être débarrassés de la tâche qui consisterait à prouver la consistance de nos édifices déductifs. Mais non, s'il y a de faux problèmes, à foison, celui-là n'en fait pas partie ! Le problème de l'origine de la démonstration est un faux-problème<sup>1</sup>, pas celui de la complétude des systèmes produits par la seule force de l'esprit.

D'une part, certains raisonnements suscitent notre étonnement, comme le raisonnement par récurrence qui est en réalité constitué d'une infinité de raisonnements impliqués. Dans les premiers chapitres de *La Science et l'Hypothèse*, Henri POINCARÉ s'est chargé de ce problème. Il a sans doute éclairer suffisamment les choses. Mais la méfiance philosophique envers l'infini, figure de l'impensable,

---

<sup>1</sup> Employant le terme de "faux-problème" nous ne suggérons pas qu'il faille considérer les recherches en histoire des mathématiques qui remontent très loin dans le passé comme étant dépourvues d'intérêt. Au contraire, le fait d'aborder de manière critique la question des origines de la démonstration rend de grands services. D'une part, ces travaux nous instruisent quant à l'existence de multiples traditions, babyloniennes, indiennes et chinoises pour ne citer que les plus anciennes. D'autre part, ils ont mis à jour, en même temps que des préoccupations théoriques comme celle de la correction des algorithmes, une réflexion sur la signification et l'interprétation des résultats pouvant être obtenus. Ainsi ces recherches sont même capitales pour nous en ce qu'elles nous permettent de considérer plus objectivement les débuts de la science européenne et de consolider, par-delà les différences culturelles, l'idée d'une construction très progressive des pratiques démonstratives.

demeure, comme le montre l'opposition des intuitionnistes et des formalistes au début du XX<sup>ème</sup> siècle. D'autre part, un mathématicien sorti pour cela de l'anonymat par TURING et Von NEUMANN, Kurt GÖDEL a proposé une démonstration de l'impossibilité de démontrer toute proposition dans un domaine précis de la science. L'incomplétude est désormais prouvée.

Mis en garde contre la Gödelite, nous ne prétendons avoir commis aucune avancée dans la réfutation des préjugés scientifiques. Notre objectif n'est pas de trancher entre les interprétations mais de reconnaître la capacité propre de la science à revenir sur sa légitimité épistémologique. C'est cette capacité qu'il faut sans doute développer personnellement ; parvenir à discuter du caractère nécessaire, non nécessaire, suffisant, non suffisant des propositions scientifiques, voilà donc ce qui apparaît décisif.

### **Un développement qui se charge d'un triple éclairage**

Trois idées nous semblent donc fondamentales.

Dans une première partie, nous tenons à faire réfléchir à la nécessité logique. La première leçon est qu'il ne saurait y avoir de démonstrations sans un travail intellectuel de symbolisation et d'axiomatisation du discours. C'est ce travail qui assure à toutes les propositions leur nécessité, interne et externe, leur cohérence et leur consistance.

Dans une seconde partie, nous abordons les "rivages" de la vérité, l'opposition vérité/véracité. La nature de la vérité est précisée comme éminemment relative, non pas claire et distincte, mais hypothético-déductive. Le bon sens nous met en garde contre nos certitudes, mais hélas pas contre l'évidence. Or démonstration se dit de toute entreprise pour asseoir la vérité d'une proposition sans recourir ni à des certitudes ni même à ce que nous considérons comme relevant de la pure et simple évidence ! Une fois ceci compris, il devient possible d'adhérer à l'idée suivant laquelle la démonstration n'est pas seulement une justification (une rationalisation dont on peut se passer quand on a un autre accès à la vérité, bien sûr l'évidence mais aussi tout ce qu'on qualifie ordinairement d'intuition et qui relèverait de la vision intellectuelle) mais une explication. La démonstration nous explique ce qu'une axiomatique nous permet de penser.

Il faut alors passer d'une compréhension étriquée de la démonstration, hélas classique comme en témoignent nombre de manuels scolaires, à l'affirmation de la fécondité de la démonstration. Pour ne pas charger trop la barque mais aussi ne pas passer sous silence le travail de dépassement de la raison orchestré par la raison elle-même, nous abordons dans un troisième temps le problème général de la rationalité scientifique avec d'autres domaines que les mathématiques, les sciences en général, les sciences humaines en particulier. La fécondité des procédures démonstratives exemplifie les ressources indéfinies, illimitées, de l'esprit humain. Par cette dernière affirmation nous ne voulons aucunement dissocier le théorique de la réflexion pratique, abaisser l'un pour rehausser l'autre. Au contraire nous nous efforçons d'asseoir la complémentarité des questions théoriques et des problèmes techniques. L'opposition entre jugements analytiques et synthétiques est dépassée. L'attention se porte sur la prise en compte du jugement scientifique modélisant le réel en multipliant et révisant constamment ses hypothèses, l'abduction comme conjugaison de déductions et d'inductions. Elle se porte également sur l'idée d'impartialité qu'on retrouve systématiquement associée à l'idée de raison pour peu qu'on y réfléchisse à la suite de Jon ELSTER.

Imitons le style des phénoménologues pour avancer notre thèse sous une forme suggestive : "Il semble que la science du XIX<sup>ème</sup> et du XX<sup>ème</sup> siècle ait compris qu'on ne pouvait échapper au scepticisme si l'on envisageait d'abord la déduction et l'induction sous l'aspect de deux raisonnements séparés : toute union de ces deux modalités cognitives, en effet, doit être tenue pour impossible. C'est pourquoi l'examen des sciences contemporaines nous révèle un effort pour saisir au sein même des systèmes de la connaissance une liaison fondamentale avec le réel qui serait constitutive de chaque vérité dans son surgissement même."

## **Plan du cours**

**Introduction : Argumenter et démontrer**

### **I L'invention de la démonstration**

**Une origine incertaine**

**La force probante des mathématiques**

**Elaborer un raisonnement nécessaire**

**Première conclusion provisoire**

### **II Les pièges du psychologisme dans la recherche de la vérité**

**Les conditions de la pensée**

**L'indémontrable et ce qui n'a pas besoin d'être démontré**

**L'universalité à la place de la nécessité ?**

**Seconde conclusion provisoire**

### **III L'usage de la démonstration en sciences**

**La démonstration et la connaissance rationnelle**

**Induction, déduction et abduction**

**L'esprit relatif à l'œuvre**

**Conclusion : Importance de la critique rationnelle**