Arithmétique et fractions égyptiennes

Il s'agit essentiellement de la décomposition de $\frac{1}{n}$ en somme de trois fractions unitaires non nécessairement distinctes. $\frac{1}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ a, b et c étant des entiers positifs $a \le b \le c$ .On parle de décomposition ordonnée et la liste de toutes ces décompositions pour une valeur de n est elle même ordonnée

On utilise l'arithmétique enseignée en terminal :
nombre premier , nombres premiers entre eux , théorème de Gauss:
On se permet juste une allusion au résultat de Dirichlet sur les suites arithmétiques et les nombres premiers qu'elles peuvent contenir.

Dans le préambule on met en évidence une méthode qui permet une décomposition de $\frac{1}{n}$ en somme de deux puis de trois fractions unitaires ; on établit une formule de base qui se compose d'une égalité et de conditions, ce qui permet d'élaborer un programme qui renvoie la liste ordonnée des décompositions.

Le logiciel utilisé est Xcas qui en ce qui concerne le numérique m' émerveille

la lecture du document 1 peut se faire dès la fin du préambule je démontre une propriété caractéristique des nombres premiers (excepté pour 2, 5 et7) qui met en relief les huit décompositions naturelles qui terminent la liste ordonnée.

Un nombre impair p $p \neq 5 \; et \; p \neq 7$ est premier si et seulement si la fin de liste est composée des huit décompositions naturelles

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{2p}+\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{2p(2p+1)} \qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{2p}+\frac{1}{2p+2}+\frac{1}{2p(p+1)}$$

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{2p}+\frac{1}{2(p+2)}+\frac{1}{p(p+2)} \qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{2p}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{6p} \qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{2p}+\frac{1}{4p}+\frac{1}{4p}$$

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{p(2p+1)} \qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{2p+2}+\frac{1}{2p+2}+\frac{1}{p(p+1)} \qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p}$$

Cette propriété est utilisée par la suite, mais d'une façon très ponctuelle, on peut donc en rejeter la lecture assez technique à la fin.

On retrouve de façon naturelle certains résultats récents de Rosati,Yamamoto, M. Minozy, et de B.Hernandez, M.Benito et E.Fernandez, Pas de grandes avancées(dommage) mais une introduction simple qui gravite autour d'une formule (une égalité et des conditions) laquelle se métamorphose en fonction de certaines hypothèses et donne naissance à des conjectures. Suit un programme permettant d'obtenir une décomposition qui vérifie la conjecture Erdos-Straus

L'aboutissement de ce travail est la conjecture finale

**pour tout nombre premier p congru à 1 modulo 4, on peut trouver,
un couple (x, u_1)
tel que
x < p, x =3 modulo 4, u_1 divise $\frac{(p+x)}{4}$, x divise p+ u_1 ou x divise p+4 u_1**

Si elle est démontrée , la conjecture **(E-S)** est vraie

On la vérifie assez facilement avec le programme du texte sur un portable basique pour $p<10^9$

Références :

"un point sur la conjecture Erdos-Straus " M. Mizony et M-L. Gardes
"egyptians fractions" B.Hernandez, M.Benito et E.Fernandez(ArXiv 10102035v2)

Table des matières

A-Préambule

A-1-1 Décomposition ordonnée de $\frac{1}{n}$ en une somme de deux fractions unitaires

pour un entier n strictement positif, on appelle ainsi l'égalité suivante

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \text{avec la condition} \quad 0 < a \le b$$

Remarque 1 :

si $a \le n$ alors $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{n}$ et il n'y a pas de décomposition car $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{n}$

de même si $a > 2\text{n}$ du fait que $a < b$ (décomposition ordonnée) car $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{n}$

Nous avons donc une **restriction** sur a $n < a \le 2\text{n}$ que nous utiliserons fréquemment par la suite

en posant $a = n + u$ *et* $b = n + v$ avec $0 < u \le n$ *et* $u \le v$

on obtient $$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+u} + \frac{1}{n+v}$$

un calcul élémentaire montre que la décomposition équivaut à $u * v = n^2$ et $u \le v$

il suffit donc de choisir un diviseur u de n^2 compris entre 1 et n , puis $v = \frac{n^2}{u}$ pour obtenir une décomposition ordonnée.

A-1-2 programme egy2LO(n) avec Xcas

Il donne les décompositions ordonnées de la fraction $\frac{1}{n}$ en une somme de deux fractions unitaires

```
egy2LO(n):={
local x,K,L,y,c;
c:=0;
K:=sort(divisors(n*n));
L:=NULL;
while(c<(1+size(K))/2){
                    x:=K[c]+n;
                    y:=n*n/K[c]+n;
                    L:=L,[x,y];
                    c:=c+1;}
L;}:;
```

pour n = 6 on obtient [7,42],[8,24],[9,18],[10,15],[12,12]

[7,42] correspond à la décomposition

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$$

A-2-1 Décomposition ordonnée de $\frac{1}{n}$ en une somme de trois fractions unitaires

Une décomposition ordonnée de $\frac{1}{n}$ en somme de trois fractions unitaires vérifie

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \qquad \text{avec} \qquad 0<a\leq b\leq c \quad .$$

On en déduit que $n+1\leq a\leq 3\text{n}$

Deux décompositions ordonnées D1 $\frac{1}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ et D2 $\frac{1}{n}=\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}$ peuvent se comparer en ce sens

D1 vient avant D2 équivaut à $a<a'$ *ou* $a=a'$ *et* $b<b'$

Pour toute valeur de n on a $\frac{1}{n}=\frac{1}{3\text{n}}+\frac{1}{3\text{n}}+\frac{1}{3\text{n}}$ et aussi $\frac{1}{n}=\frac{1}{2\text{n}+2}+\frac{1}{2\text{n}+2}+\frac{1}{n(n+1)}$

nous venons d'observer deux décompositions "naturelles " : a, b et c sont des polynômes en n à coefficients entiers et l'égalité a lieu pour toutes valeurs de n . Pour un nombre premier pas trop petit il y a 36 décompositions naturelles. (La deuxième est une décomposition ordonnée si n > 1.)

A-2-2 La liste egy3LO(n)

Comment dresser une liste ordonnée des décompositions (ordonnées) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ de $\frac{1}{n}$?

Une idée est d'utiliser la décomposition en deux fractions vue précédemment .

On peut faire porter notre attention sur a qui est le plus petit des trois nombres a, b et c.

Comme $n<a\leq 3\text{n}$ on pose $a=n+x$ *avec* $0<x\leq 2\text{n}$

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{a}=\frac{x}{n(n+x)}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \qquad \frac{1}{n(n+x)}=\frac{1}{xb}+\frac{1}{xc}$$

On est en présence d'une décomposition en deux fractions ; on sait que

$$xb=u+n(n+x) \qquad xc=v+n(n+x) \qquad uv=n^2(n+x)^2 \qquad \textit{et} \qquad u\leq v$$

b et c seront entiers si x divise $u+n^2$ et x divise $v+n^2$,

$$a=n+x \qquad b=n+\frac{(u+n^2)}{x} \qquad c=n+\frac{(v+n^2)}{x}$$

La décomposition étant ordonnée $a\leq b$ *donc* $n+x\leq n+\frac{(u+n^2)}{x}$ *soit* $x^2-n^2\leq u$

A-2-3 La formule de base (FB)

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{(n+x)}+\frac{1}{\dfrac{n(n+x)+u}{x}}+\frac{1}{\dfrac{n(n+x)+v}{x}}$$

$x^2-n^2 \le u \le n(n+x)$ $\quad uv=n^2(n+x)^2$ $\quad x \le 2\text{n}$ $\quad$ *et* $\quad x$ *divise* $\quad u+n^2$ $\quad$ *et* $\quad v+n^2$

A-2-4 Le programme

pour chaque valeur de x entre 1 et 2n on calcule $n^2(n+x)^2$ et on sélectionne les diviseurs u plus petit ou égal à $n(n+x)$ et supérieur ou égal à x^2-n^2 tels que x divise $u+n^2$ et aussi $v+n^2$. Cette toute dernière condition est importante ; si on l'oublie dans le programme, celui ci renverra par exemple pour n = 6 la décomposition [10,17, $\frac{255}{2}$] correspondante à x=4 et u=8

remarque 2 :
Pour certaines valeurs de x il peut ne pas exister de décomposition, en revanche,pour x = 1 ou x = 2, il en existe toujours et cela pour toutes valeurs de n.

```
 egy3LO(n):={
local c,x,y,y, H,L;
L:=NULL;
x:=1;
while(x<2*n+1){
                c:=0;
                H:=sort(divisors(n*n*(x+n)*(n+x)));
                while(c<(1+size(H))/2){// on a bien ainsi y<z//
                                y:=H[c]+n*n ;
                                z:=n*n*(n+x)*(n+x)/H[c]+n*n;
                                if(irem(y,x)==0 and irem(z,x)==0 and y>=x*x){
                                                L:=L,[n+x,n+y/x,n+z/x];}
c:=c+1;}
x:=x+1;}
L;}:;
```

// [a,b,c] correspondant à la décomposition $\frac{1}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}$ //

par exemple : pour n=2, egy3LO(2) contient 10 décompositions

[3,7,42],[3,8,24],[3,9,18],[3,10,15],[3,12,12],[4,5,20],[4,6,12],[4,8,8],[5,5,10],[6,6,6]

egy3LO(60) en contient 1290.

La décomposition [4,8,8] a une propriété intéressante,tous les termes sont multiples de 4 ; sur les 10 décompositions de egy3LO(2) , elle est la seule à posséder cette propriété.

Remarque 3:
Cette propriété a lieu dans la formule **(FB)** si et seulement si p+x, u et v sont multiple de 4. En particulier si u = 4 u' et v = 4v' alors u' divise $\dfrac{n^2(n+x)^2}{16}$

B La conjecture Erdos -Straus

B-1-1 Énoncé

pour tout n > 1
$\dfrac{1}{n}$ est la somme de trois fractions unitaires dont les dénominateurs sont :
multiples de 4 conjecture **(E-S)**

il suffit de l'établir pour tous les nombres premiers , puisque tout nombre entier n >1 possède un diviseur premier p $n=kp$ et $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ implique $\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{ka}+\dfrac{1}{kb}+\dfrac{1}{kc}$

Puisque la conjecture **(E-S)** est vérifiée pour n =2 par la décomposition [4, 8, 8], on peut se limiter aux nombres premiers impairs ;
On ne considère maintenant que des décompositions ordonnées de $\dfrac{1}{p}$ avec p premier impair

B-1-2 Réécriture de la formule de base (FB) pour un nombre premier impair: La formule FBP

on présente l'égalité autrement en éliminant v. on modifie les conditions

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{(p+x)}+\frac{1}{\dfrac{u+p(p+x)}{x}}+\frac{1}{\dfrac{p(p+x)(u+p(p+x))}{ux}}$$

$x^2-p^2\leq u\leq p(p+x)$ $\quad u \quad divise \quad p^2(p+x)^2 \quad x\leq 2\text{p} \quad et \quad x \quad divise \quad u+p^2$

La condition x divise $v+p^2$ de la formule **(FB)** n'est plus nécessaire car

x divise $u+p^2$ **et p premier implique que x divise** $v+p^2$ **(IP)**

$$u(v+p^2)=p^2(p+x)^2+p^2u=p^2(2\text{xp}+x^2+p^2+u)$$

si x divise $u+p^2$ alors x divise le second membre donc aussi le premier $u(v+p^2)$
Si x est premier avec u le résultat est acquit
sinon le pgcd(x,u) divise p^2 et est différent de 1 donc p divise x
Comme $x\leq 2\text{p}$ $\quad x:=p \quad ou \quad x=2\text{p}$
$x=p \quad uv=4\text{p}^4 \quad et \quad u\leq v$ donc x = p divise v et $v+p^2$

$x=2\text{p} \quad uv=9\text{p}^4 \quad et \quad u\leq v$ v est impair et multiple de p donc x =2p divise $v+p^2$

On a vu que pour n = 6 , nombre non premier, l'implication (IP) était fausse

B-1-3 Quelques résultats pour une décomposition vérifiant la conjecture (E-S)

Un premier résultat

Si $\frac{1}{p}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ vérifie la conjecture **(E-S)**, alors p divise c.

p divise le produit abc donc il divise a, b ou c.

De la formule **(FBP)** découlent les propositions suivantes

---Si la décomposition vérifie **(E-S)** alors p ne divise pas a
par l'absurde si p divise a donc $a=2\text{p} \quad ou \quad a=3\text{p}$ (restriction) mais 4 ne divise ni l'un ,ni l'autre d'où l'affirmation. On en déduit au passage la proposition importante suivante :

Si la décomposition vérifie **(E-S)** x et p sont premiers entre eux (sinon p divise a = p+x).

---Si la décomposition vérifie **(E-S)** et si p ne divise pas b, le résultat est acquit.
(p ne divise ni a, ni b donc il divise c)
---Si la décomposition vérifie **(E-S)** et si p divise b, alors p divise u et $u=pu'$
u est multiple de 4 et $u\leq p(p+x)\leq 3\text{p}^2$ donc p^2 ne divise pas u
u' et p sont premiers entre eux. On tire c dans la formule **(FBP)**
$c=\frac{p(p+x)(u'+p+x)}{u'x}$ u' et x sont premiers avec p donc p divise c

un deuxième résultat

Si la décomposition vérifie **(E-S)** et n'est pas $\frac{1}{p}=\frac{1}{2\text{p}+2}+\frac{1}{2\text{p}+2}+\frac{1}{p(p+1)}$ alors $a<2\text{p}$

Ce résultat découle de la propriété démontrée dans le document 1
Si $2\text{p}\leq a$ sur les huit décompositions de la fin de liste, une seule vérifie **(E-S)** lorsque p est congru à 3 modulo 4.
On en déduit que $x<p$ pour toutes les décompositions qui vérifient **(E-S)** sauf éventuellement une

Un troisième résultat
Si la décomposition vérifie **(E-S) alors** dans la formule **(FBP)** $u=4u'$ et u' divise $\frac{p(p+x)^2}{16}$
voir la remarque 3 sur la formule **(FB)**

B-1-4 La formule Erdos-Straus FES

la condition « la décomposition vérifie **(E-S)** » modifie la formule **(FBP)**
Celle ci devient

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{(p+x)}+\frac{1}{\frac{4u'+p(p+x)}{x}}+\frac{1}{p\frac{(p+x)(4u'+p(p+x))}{4u'x}}$$

$$x=4t-irem(p,4) \quad x<p \quad u'\leq\frac{p(p+x)}{4} \quad u' \quad divise \quad \frac{p(p+x)^2}{16} \quad et \quad x \quad divise \quad 4u'+p^2$$

Bien sur, la décomposition $\frac{1}{p}=\frac{1}{2p+2}+\frac{1}{2p+2}+\frac{1}{p(p+1)}$ qui vérifie la conjecture **(E-S)** , lorsque p est congru à 3 modulo 4, ne vérifie pas la formule dans son intégralité car $x=p+2 \quad donc \quad p<x$. Elle est la seule !

on en déduit le programme suivant qui retourne la liste ordonnée des décompositions vérifiant la conjecture **(E-S)**
Si pour un certain p, la liste est vide , la conjecture **(E-S)** est résolue ; elle est fausse !

B-1-5 Le programme

```
ESLO(p):={//p est premier impair//
local c,x,y,H ,L;
L:=NULL ;
x:=4-irem(p,4);
while(x<p){
        c:=0;
        H:=divisors(p*(p+x)*(p+x)/16);
        while(c<size(H)){
                        if(H[c]<p*(p+x)/4){// on a bien ainsi b <c //;
                                y:=4*H[c]+p*p;
                                if(irem(y,x)==0 ){
                                        L:=L,[(p+x),(p+y/x),p*(p+x)*(p+y/x)/(4*H[c])]];
                                                };
                                        } ;
        c:=c+1;
                        } ;
x:=x+4;
                }
```

```
if(irem(p-3,4)==0){L:=L,[2p+2,2p+2,p(p+1)];} ;
L;
}
:;
```

exemple :
ESLO(13)
[16,72,1872],[16,80,520],[16,104,208],[20,40,520]

B-2-1 Une reformulation

Pour tout p premier congru à 3 modulo 4, la décomposition $\frac{1}{p}=\frac{1}{p+1}+\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1}{p(p+1)^2}$ vérifie la conjecture (**E-S**). On l'obtient à partir de la formule(**FES**) pour le couple x = 1 et u' = $\frac{p+1}{4}$.

Ainsi pour p congru à 3 modulo 4, nous avons des décompositions naturelles qui vérifient la conjecture **(E-S)** , mais, pour p=4n+1, aucune des 36 décompositions naturelles ne permet de prouver la conjecture

On se limite dorénavant aux nombres premiers de la forme 4n+1

Pour vérifier **(E-S)** la condition sur x est alors $x=3+4x'$

La conjecture suivante est équivalente à la conjecture**(E-S)**
Conjecture (**CES**)
pour tout nombre premier impair de la forme 4n+1, il existe un couple (x,u') qui vérifie
$x=3+4x' \quad x<p \quad u'\leq\frac{p(p+x)}{4} \quad u' \quad divise \quad \frac{p(p+x)^2}{16} \quad et \quad x \quad divise \quad 4u'+p^2$

B-2-2 Vers d'autres conjectures

On peut élaborer un programme qui pour p nous retourne la liste des décompositions et bien que celle ci contienne beaucoup d'éléments, il est difficile de montrer qu'elle n'est pas vide.

Pour tenter d'y remédier , la tendance est d'énoncer une conjecture forte c'est à dire une conjecture qui peut s'avérer fausse sans que la conjecture **(ES)** soit résolue pour autant ; mais qui si elle est vraie entraîne la véracité de (**ES)**
On se limite ainsi à certaines décompositions en espérant que la recherche de cet élément(qui

nous sauve d'une liste vide) soit simplifiée. De plus l'écriture du programme en sera simplifiée.

Dans la formule **(FES)** , 4u' est le levier sur lequel on peut agir.
Deux conjectures principales apparaissent suivant que p divise 4u' ou ne divise pas 4u'. Elles sont largement étudiées ; mais d'autres existent plus fortes donc plus dangereuses

C Notre conjecture provisoire (NCP)

faisons l'hypothèse que pour chaque nombre premier , congru à 1 modulo 4, il existe une décomposition qui vérifie **(E-S) et** pour laquelle p+x divise 4u'

C-1-1 La formule (FCP)

dans la formule **(FES) on a**

$$4u' = u_1(p+x)$$

on obtient

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{(p+x)} + \frac{1}{\frac{(p+u_1)(p+x)}{x}} + \frac{1}{p\frac{(p+x)(p+u_1)}{u_1 x}}$$

Montrons que $pgcd(u_{1,} p) = 1$

$4u' \leq p(p+x)$ donc $u_1 \leq p$

$pgcd(u_{1,} p) = 1 \quad ou \quad pgcd(u_{1,} p) = p$

Si $pgcd(u_{1,} p) = p \quad u_1 = p$

x est premier avec p+x donc x divise $p+u_1 = 2p$ x = 1 ou x = 2

on obtient deux décompositions

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{(p+1)} + \frac{1}{2p(p+1)} + \frac{1}{2p(p+1)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p(p+2)} + \frac{1}{p(p+2)}$$

mais pour p congru à 1 modulo 4 aucune des deux ne vérifie la conjecture **(E-S)**

Donc $pgcd(u_{1,} p) = 1$ et u_1 divise p+x, car $u_1(p+x)$ divise $p(p+x)^2$ (Gauss)

La formule FC P

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{(p+x)} + \frac{1}{(p+x)\frac{p+u_1}{x}} + \frac{1}{p\frac{(p+x)}{u_1}\frac{(p+u_1)}{x}}$$

$$x = 3 + 4x' \qquad u_1 \quad divise \quad \frac{(p+x)}{4} \qquad x \leq p \quad et \quad x \quad divise \quad p+u_1$$

remarque 4 $u_1 \quad divise \quad \frac{(p+x)}{4}$

Si u_1 est impair pas de problème 4 divise c, mais dans le cas contraire p+ u_1 est impair et la condition est nécessaire sinon 4 ne divise pas c

C-1-2 formulation de notre conjecture provisoire (NCP)

pour tout nombre premier p congru à 1 modulo 4, on peut trouver,
un couple (x, u_1)
tel que
x < p, x congru à 3 modulo 4, u_1 divise $\frac{(p+x)}{4}$, x divise p+ u_1

Si la conjecture est vérifiée pour p , la formule **(FCP)** donne une décomposition qui vérifie la conjecture **(E-S)**

remarque 5 :
l'égalité $p=4\text{n}+1$ donne naissance à six nouvelles égalités suivant le reste de n modulo 6

n=6n'	n=6n'+1	n=6n'+2	n=6n'+3	n=6n'+4	n=6n'+5
$p=24\text{n}'+1$	$p=24\text{n}'+5$	$p=24\text{n}'+9$	$p=24\text{n}'+13$	$p=24\text{n}'+17$	$p=24\text{n}'+21$
type I	type II	type III	type IV	type V	typeVI

Pour tous les nombres premiers des types II, IV, V la formule(**FCP**) donne une décomposition qui vérifie **(ES)**

$u_1=1 \quad et \quad x=3$ donne une décomposition qui vérifie la conjecture **(E-S)** pour II et V
$u_1=2 \quad et \quad x=3$ donne une décomposition qui vérifie la conjecture **(E-S)** pour IV
par exemple pour V:

$$\frac{1}{24\text{n}'+17}=\frac{1}{24\text{n}'+20}+\frac{1}{(24\text{n}'+20)(8\text{n}'+6)}+\frac{1}{(24\text{n}'+17)(24\text{n}'+20)(8\text{n}'+6)}$$

Par ailleurs, p est premier, il n'est pas de la forme III, ni de la forme VI.

On peut ne considérer que des nombres premiers de la forme $p=24\text{n}'+1$

C-1-3 Le programme

voici un programme qui retourne [p, x, u_1] avec x minimal

programme

```
ERNCP(p):={//p de la forme 24n+1//
local x,k,j,K;
x:=3;
while(x<p){
                K:=divisors((p+x)/4);
                for(j:=0;j<size(K);j++){
                                if(irem(p+K[j],x)==0 ){return([p,x,K[j]]) ;
                                                };
                                }
        x:=x+4;}
return(0)
}:;
```

On vérifie assez facilement (30mns sur un portable)que la conjecture tient pour $p<10^8$.

C-2-1 Un autre regard sur la formule (FCP)

Dans la formule **(FCP)**

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{(p+x)}+\frac{1}{(p+x)\frac{p+u_1}{x}}+\frac{1}{p\frac{p+x}{u_1}\frac{p+u_1}{x}}$$

posons $\frac{p+x}{u_1}=K$ *et* $\frac{p+u_1}{x}=b'$ elle devient

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{Ku_1}+\frac{1}{Ku_1 b'}+\frac{1}{pKb'}$$

Un peu d'associativité

$(u_1+p)+x=(b'+1)x=u_1+(p+x)=(K+1)u_1 \qquad (b'+1)x=(K+1)u_1$

p et x sont premiers entre eux ; u_1 divise p+x donc pgcd (x, u_1)=1

x est premier avec u_1 , il divise $(K+1)u_1$ donc il divise K+1

$$K+1=kx \quad et \quad b'+1=ku_1$$

Si la décomposition vérifie ES alors 4 divise K c'est clair si u_1 est impair car 4 divise a= Ku_1 , si u_1 est pair alors b' est impair et 4 divise c = pKb'.

$$K=4K'$$

Un peu de congruences

$4K'u_1=p+x$ comme p est de la forme 4n+1 , x est de la forme 3+4x' et k est de la forme 3+4k' car $4K'+1=kx$

ainsi $4K'+1=(3+4x')(3+4k')$

Cette formule montre que 4K' et 3+4x' sont premiers entre eux

$p+x=Ku_1$ donc $p=Ku_1-x$ et $p=4K'u_1-3-4x'$

La suite arithmétique $U_m=4K'm-3-4x'$ contient , pour des valeurs de m appropriées, une infinité de nombres premiers

$$p=[(3+4x')(3+4k')-1]m-3-4x' \quad \text{(Dirichlet)}$$

pour un tel p notre conjecture provisoire est vérifiée par le couple(x, u_1)

$x=3+4x'$ *et* $u_1=m$ avec comme décomposition correspondante vérifiant **(E-S)**

$$\frac{1}{4*((3+4*x')*k'+2+3*x')*m-3-4*x'} =$$

$$\frac{1}{4*((3+4*x')*k'+2+3*x')*m}+\frac{1}{4*((3+4*x')*k'+2+3*x')*m*((4*k'+3)*m-1)} +$$

$$\frac{1}{4*((3+4*x')*k'+2+3*x')*(4*((3+4*x')*k'+2+3*x')*m-3-4*x')*((4*k'+3)*m-1)}$$

C-2-2 Une autre reformulation de notre conjecture provisoire

Nous sommes à même de reformuler notre conjecture provisoire

tout nombre premier p de la forme 4n+1 peut s'écrire p= $[(3+4x')(3+4k')-1]m-3-4x'$

On retrouve aux notations près, une petite partie du résultat de B.Hernandez, M.Benito et E.Fernandez(ArXiv 10102035v2) :

Une question se pose naturellement : Quels sont les nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme ?

$$[(3+4x')(3+4k')-1]m-3-x'$$

sous entendu, parmi les nombres impairs de la forme 4n+1

Le programme suivant permet de zoomer sur ces nombres

```
Erregard(z):={/z de la forme 4n+1//
local a,k,d,L;//a remplace x' , x' n'est pas accepter par le programme//
a=0;
L:=z;
while(a<(z-1)/4){
        k:=0;
        while(k<=((z-1)/4-2*a-1)/(4*a+3)){
                        if (irem((z-1)/4+a+1,2+3*a+(3+4*a)*k)==0)
            { d:=(z-1)/4+a+1)/(2+3a+(3+4*a)*k) ; L:=L,a,k, d; return(L);}
                        k =k+1;}
        a:=a+1;}
return L;
}:;
```

```
L:=NULL:;j:=1;while(j<1000){if(size(ERregard(4*j+1))==1){L:=L,4*j+1;}j:=j+1;}:;L
Evaluation time: 6.703
"Done",1,"Done",9,25,49,81,105,121,169,225,289,361,441,465,529,585,625,729,801,841,961,1089
,1225,1369,1521,1681,1849,2025,2209,2401,2601,2641,2809,2929,2961,3025,3249,3481,3705,372
1,3969
```

On observe les carrés des nombres impair plus grand que 1 donc des nombres non premiers, mais aussi d'autres nombres : 105, 465 , 585, 801, ….tous non premiers au moins pour ceux inférieurs à 1000 000 000 cela va t il durer ?

On observe également que tous peuvent s'écrire sous la forme X^2+Y^2-1
pour 9 : 1^2+3^2-1 ; pour 105 : 9^2+5^2-1 …...

D Un résultat manqué

D-1-1 Un résultat de Rosati et Yamamoto

Pour p premier $p=24n'+1$, suivant le reste r de n' modulo 35, nous obtenons 35 équations de la forme $p=840n+24r+1$ pour r variant de 0 à 34.

Seules celles pour lesquelles le pgcd(840 , 24r+1)=1 sont à considérer (sinon p n'est pas premier)

notre conjecture fournit une équation qui vérifie **(E-S)** indépendamment de n pour un grand nombre d'entre elles
Il faut et il suffit pour cela de trouver x et u_1 vérifiant les conditions de la formule (**FCP**), chacun d'eux divisant 840
et u_1 n'étant pas multiple de 4.

par exemple :

---pour r = 4 $p=840n+97$
$u_1=5$ *et* $x=3$ donne l'équation

$$\frac{1}{840n+97}=\frac{1}{840n+100}+\frac{1}{(840n+100)(280n+34)}+\frac{1}{(840n+97)(168n+20)(280n+34)}$$

qui vérifie **(ES)** pour tous les nombres premier qui s'écrivent $p=840n+97$

---pour r = 3 $p=840n+73$
$u_1=2$ *et* $x=15$

$$\frac{1}{840n+73}=\frac{1}{840n+88}+\frac{1}{(840n+88)(56n+5)}+\frac{1}{(840n+73)(420n+44)(56n+5)}$$

qui vérifie **(ES)** pour tous les nombres premier qui s'écrivent $p=840n+73$

Si dans l'équation $p=840n+24r+1$ $24r+1$ est un carré 1, 121,169, 289, 361, 529
Il n'existe pas d'équation valable pour tout n et ce sont les seules valeurs.

Ce résultat que j'avais initialement attribué à Mordell a en fait été trouvé par Rosati et Yamamoto il y a quelques décennies, comme me l'a fait remarquer M.Mnozy.

D-1-2 Notre problème

Nous ne trouvons pas de formule indépendante de n pour $p=840n+241$ et pour $p=840n+409$ correspondant à r = 10 et r = 17

comme le montre le programme "Rosatiprovisoire"

```
Rosatiprovisoire(l):={// l varie entre 0 et 34 et p  est de la forme 35*24n+ 24*l+1//
local x,r,j,K;
 x:=3;
r:=24*l+1;
if(gcd(r,35)!=1){return(0)}// p n'est pas premier//
while(x<106){
             K:=divisors(((r+x)/4));
             j:=0;
             while(j<size(K)){if(irem(105,x)==0){
                                           if(irem(210,K[j])==0){
                                                          if(irem(r+K[j],x)==0 )
                                                               {return(0);}};};
                           j:=j+1;};
             x:=x+4;}
return(r);}:;
```

Rosatiprovisoire(j)$(j=0..34)
1,0,0,0,0,121,0,169,0,0,241,0,289,0,0,361,0,409,0,0,0,0,529,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0

Pour une valeur de l fixée le programme renvoie **0** dans deux cas :

- La suite arithmétique 35*24n+ 24*l+1 ne contient pas de nombres premiers (l= 6 par exemple)
- il existe une décomposition vérifiant (**ES**) indépendante de n pour tous les nombres premiers de la suite

par exemple

– pour l = 4 x = 3 et $u_1 = 5$

$$\frac{1}{840n+97} = \frac{1}{840n+100} + \frac{1}{(840n+100)(280n+34)} + \frac{1}{(840n+97)(280n+34)(168n+20)}$$

pour l = 20 x = 7 et $u_1 = 2$

$$\frac{1}{840n+481} = \frac{1}{840n+488} + \frac{1}{(840n+488)(120n+69)} + \frac{1}{(840n+481)(420n+244)(120n+69)}$$

Remarque

Le résultat de **Rosati** met en évidence des carrés de nombres premiers : 121, 169, 289....notre programme "Rosati provisoire' bute sur ces nombres ….. pourquoi ?
Cela provient du résultat suivant :

soit p un nombre premier impair, dans la décomposition $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ au moins deux des trois nombres a, b et c sont divisibles par p

démonstration
On sait qu'au moins un des trois nombres est divisible par p(supposons sans perdre de généralité que ce soit a) on pose $a = pm$ l'égalité devient $\frac{1}{p^2} - \frac{1}{pm} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ et finalement

$$\frac{1}{p^2 m} = \frac{1}{(m-p)b} + \frac{1}{(m-p)c}$$ on en déduit

$b = \frac{U + p^2 m}{m - p}$ *et* $c = \frac{V + p^2 m}{m - p}$ avec $UV = p^4 m^2$

ceci montre que b ou c est divisible par p, car m-p est au plus divisible par p.

dans l'égalité

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{(p^2+x)} + \frac{1}{(p^2+x)\frac{p^2+u_1}{x}} + \frac{1}{p^2\frac{(p^2+x)}{u_1}\frac{(p^2+u_1)}{x}}$$

deux des dénominateurs sont divisibles par p
donc p divise x ou p divise u_1
Ainsi pour 121 11 divise x ou 11 divise u_1 mais 11 ne divise pas 840 .Le programme ne renvoie pas 0, mais 121

Pour retrouver le résultat de Rosati et Yamamoto allons nous ratisser plus large!

D-1-3 Une conjecture fausse , mais qui rend service

faisons l'hypothèse que pour chaque nombre premier , congru à 1 modulo 4, il existe une décomposition qui vérifie **(E-S)** pour laquelle dans la formule(**FES)**

$u' = pu_1 \quad et \quad 4u_1 \quad divise\ p+x$

Cela donne $$\frac{1}{p} = \frac{1}{(p+x)} + \frac{1}{p\frac{(p+x+4u_1)}{x}} + \frac{1}{p\frac{(p+x)(p+x+4u_1)}{(x4u_1)}}$$

x est premier avec p donc $x \quad divise \quad 4u_1 + p$

$x \quad divise \quad 4u_1 + p$ et par hypothèse $4u_1 \quad divise \quad p+x$

donc x et 4 u_1 divisent p+x+4 u_1

comme $x \quad et \quad 4u_1$ sont premiers entre eux

$x4u_1 \quad divise \quad p+x+4u_1$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{(p+x)} + \frac{1}{p\frac{(p+x+4u_1)}{x}} + \frac{1}{p(p+x)\frac{(p+x+4u_1)}{(x4u_1)}} \quad \textbf{(FX ?)}$$

$x = 3+4x' \qquad u_1 \quad divise \quad \frac{(p+x)}{4} \qquad x < p \quad et \quad x \quad divise \quad p+4u_1$

Bizarrement, pour p = 2521 et deux autres valeurs on ne trouve pas de couple (x, u_1) vérifiant les conditions ci-dessus

Malgré tout on peut améliorer notre conjecture provisoire(qui,elle, pour p = 2521 permet de trouver un couple, de même pour les deux autres valeurs).

D-2-1 Notre conjecture

pour tout nombre premier p congru à 1 modulo 4, on peut trouver,
un couple (x, u_1)
tel que
x < p, x =3 modulo 4, u_1 divise $\frac{(p+x)}{4}$, x divise p+ u_1 ou x divise p+4 u_1

On a vu que si une décomposition vérifiait la conjecture **(E-S)**,
p divise b et c ou p divise c uniquement
avec notre dernière conjecture, nous jouons sur les deux tableaux

D-2-2 Le programme

```
ERDOS(p):={//p de la forme 24n+1//
local x,k,j,L,K;
L:=p;
x:=3;
while(x<p){
        K:=divisors((p+x)/4);
        for(j:=0;j<size(K);j++){
                        if(irem(p+K[j],x)==0 ){return(p,[1,x,K[j]],p+x,
(p+K[j])*(p+x)/x,p*(p+K[j])*(p+x)/(x*K[j]));};
                        if(irem(p+4*K[j],x)==0){return(p,
[2,x,K[j]],p+x,p*(p+x+4*K[j])/x, p*(p+x)*(p+x+4*K[j])/(4*K[j]*x))};};
        x:=x+4;}
return(0)
}
:;
```

Avec cette conjecture notre problème disparaît et nous retrouvons le résultat de Rosati et Yamamoto**.** Comme le montre le programme suivant

```
Rosati(l):={//p de la forme  24*   5∗7   n + 24*l + 1//
local x,r,j,K;
 x:=3;
r:=24*l+1;
if(gcd(r,35)!=1){return(0)}
while(x<106){
        K:=divisors(((r+x)/4));
        j:=0;
        while(j<size(K)){
                if(irem(105,x)==0){
                        if(irem(210,K[j])==0){
                                if(irem(r+K[j],x)==0 )
                                        {return(0);};
                                if(irem(r+4*K[j],x)==0)
                                        {return(0);};};};
                    j:=j+1;};
    x:=x+4;}
return(24*l+1);}
 :;
```

Rosati(j)$(j=0..34)

1,0,0,0,0,121,0,169,0,0,0,0,289,0,0,361,0,0,0,0,0,0,529,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0

D-2-3 Vérifications

ERDOS(241)
241,[2,7,1],248,8676,537912

$$\frac{1}{840n+241}=\frac{1}{840n+248}+\frac{1}{(840n+241)(120n+36)}+\frac{1}{(840n+241)(120n+36)(210n+62)}$$

pas d'équation pour la formule de type 1.

ERDOS(409)
409,[2,7,1],416,24540,2552160

$$\frac{1}{840n+409}=\frac{1}{840n+416}+\frac{1}{(840n+409)(120n+60)}+\frac{1}{(840n+409)(120n+60)(210n+104)}$$

remarque :
pour p = 73 nous obtenons une équation différente de celle déjà trouvée pour une valeur de x plus petite (x=7 au lieu de x=15)

ERDOS(73)
73,[2,7,1],80,876,17520

$$\frac{1}{840n+73}=\frac{1}{840n+80}+\frac{1}{(840n+73)(120n+12)}+\frac{1}{(840n+73)(210n+20)(120n+12)}$$

Remarque :
les nombres 241, 409, 2521 font partie d'une suite plus grande
5, 17, 241,1249, 2521, 5569, 9649, 21169, 43969, 5101441 et peut être d'autres, pour lesquels la liste des décompositions qui vérifient notre conjecture provisoire ne contient qu'une seule décomposition. (mais une seule suffit !)

D-2-4-L' ensemble C11

On peut très facilement adapter le programme Mordell pour poursuivre avec le nombre premier 11. on remplace le bloc 5*7 par 5*7*11 et on répercute sur les conditions pour x et u_1 .

Par exemple pour vérifier l'ensemble C11 dont parle M.Mizony (1) on remplace le bloc 5*7 par 3*5*7*11 on obtient les 102 classes évoquées par lui , celles de sa liste C11 au nombre de 96 plus

1201, 2041, 6001, 10441, 21841, 24481

qu'il élimine grâce à ses trois formules

```
chercheC11(l):={//p de la forme24*  3∗5∗7∗11  *n +24*l + 1//
local x,r,j,K;
 x:=3;
r:=24*l+1;
if(gcd(r,5*7*11)!=1){return(0)}
while(x<9*5*7*11+1){
                K:=divisors(((r+x)/4));
                j:=0;
                while(j<size(K)){
                    if(irem(9*7*5*11,x)==0){if(irem(2*9*5*7*11,K[j])==0){
                                    if(irem(r+K[j],x)==0 ){return(0);};
                                    if(irem(r+4*K[j],x)==0){return(0);};};};};
                            j:=j+1;};
                x:=x+4;}
return(24*l+1);
}
:;
```

T:=%{chercheC11(j)$(j=0..3*5*7*11-1)%}
Evaluation time: 91.406

set[1,0,169,289,361,529,841,961,1201,1369,1681,1849,2041,2209,2521,2641,2689,2809,3481,3529,3721,4321,4489,5041,5161,5329,5569,6001,6169,6241,6889,7561,7681,7921,8089,8761,9241,9409,9529,9601,9769,10081,10201,10441,10609,10921,11089,11449,11881,11929,12049,12601,12721,12769,12961,13561,13729,14281,14401,14569,14809,15409,15481,16129,16801,16921,17161,17329,18001,18481,18649,18769,18841,19009,19321,19441,19849,20161,20329,20521,20689,21001,21121,21169,21289,21841,21961,22009,22201,22801,22969,23521,23809,24049,24481,24649,24721,25369,26041,26161,26401,26569,27241]

103 éléments à cause du zéro en deuxième position

Document :

Fin de Liste pour un nombre premier impair, différent de 5 et de 7

On s'intéresse aux décompositions ordonnées $\frac{1}{p}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ des nombres premiers impairs p, plus précisément, à la fin de la liste ordonnée c'est à dire lorsque $2p\leq a\leq 3p$

-----J'ai montré,fin 2012, la propriété suivante (peut être était elle connue avant?)........

p est premier impair $p\neq 5$ *et* $p\neq 7$ si et seulement si la fin de liste est composée des huit décompositions naturelles

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{2p}+\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{2p(2p+1)} \qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{2p}+\frac{1}{2p+2}+\frac{1}{2p(p+1)}$$

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{2p}+\frac{1}{2(p+2)}+\frac{1}{p(p+2)} \qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{2p}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{6p} \qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{2p}+\frac{1}{4p}+\frac{1}{4p}$$

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{p(2p+1)} \qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{2p+2}+\frac{1}{2p+2}+\frac{1}{p(p+1)} \qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p}$$

A- Les décompositions extrêmes

Examinons d'abord les deux cas extrêmes a=2p puis a =3 p.

le cas $a=2p$

on en déduit $\frac{1}{2p}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ce qui d'après le préambule donne les décompositions :

$[1+2p, 2p(1+2p)]$ $[2(1+p), 2p(1+p)]$ $[2(2+p), p(2+p)]$ $[3p, 6p]$ et $[4p, 4p]$

on a donc cinq décompositions naturelles

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{2p}+\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{2p(2p+1)} \qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{2p}+\frac{1}{2p+2}+\frac{1}{2p(p+1)} \qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{2p}+\frac{1}{2(p+2)}+\frac{1}{p(p+2)}$$

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{2p}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{6p} \qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{2p}+\frac{1}{4p}+\frac{1}{4p}$$

Le cas $a=3p$

$\frac{1}{p}=\frac{1}{3p}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ et $3p\leq b$ qui donne $\frac{1}{3p}=\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}$ avec $2b\leq 2(3p)$ (restriction)

d'où $b=3p$ On a une seule décomposition naturelle $\frac{1}{p}=\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p}$

nous avons déjà six décompositions

B- Les décompositions intermédiaires

On suppose maintenant $0<x<p$ $\frac{1}{p}=\frac{1}{2p+x}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

d'après le préambule

$$\frac{1}{p(2p+x)}=\frac{1}{(p+x)b}+\frac{1}{(p+x)c} \qquad (E)$$

(j) $(p+x)b=u+p(2p+x)$ et (jj) $(p+x)c=v+p(2p+x)$

avec $uv=p^2(2p+x)^2$ et $u\leq v$ (e)

de plus

(f) $(p+x)(2p+x)\leq(p+x)b$ car $2p+x\leq b$

(ff) $(p+x)b\leq 2p(2p+x)$ restriction dans l'équation(E)

D'après (e) p divise le produit u.v donc p divise l'un des facteurs(p est premier) ;

B- 1 P ne divise pas u

On suppose dans cette partie que p ne divise pas u

Comme $uv=p^2(p+x)^2$ p^2 divise v On pose $v=v'p^2$ de

(j) $(p+x)b=u+p(2p+x)$ et (f) $(p+x)(2p+x)\leq(p+x)b$ on déduit

$x(2p+x)\leq u$ comme $uv'=(2p+x)^2$ on en déduit $v'\leq 2p+x$ (i)

par ailleurs
(jj) s'écrit $(p+x)c=p^2v'+p(2p+x)$ p et p+x sont premier entre eux donc p divise c
posons $c=kp$

on a $(p+x)k=pv'+2p+x=p(v'+1)+p+x$ $(p+x)(k-1)=p(v'+1)$

donc p+x divise p(v'+1) donc il divise v'+1(toujours Gauss)

On pose $v'+1=h(p+x)$ (ii)

(i) et (ii) implique $h(p+x)\leq 2p+x+1$

donc

h = 1 ou h = 2 car $0<x<p$

Pour h = 2 on obtient une seule décomposition x = 1 ; v' =u = 2p+1 ; b = 2p+1 ; c = p(2p+1)

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{p(2p+1)}$$

Pour h = 1

(ii) donne v' = p+x-1 comme $x(2p+x)\leq u$ on a

$x(2p+x)(p+x-1)\leq uv'$

on en déduit que $x(2p+x)(p+x-1)\leq(2p+x)^2$

qui conduit à $(2p+x)(x-2)(p+x)\leq 0$ d'où x = 1 ou x = 2.

Pour x = 2

v' =p+1 ; u=4(p+1) ; b=2(p+1) ; c=p(p+1) On obtient la décomposition naturelle

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{2p+2}+\frac{1}{2p+2}+\frac{1}{p(p+1)}$$

Pour x = 1 ; v ' = p pas de décomposition (p ne divise pas 2p+x)

En résumé deux nouvelles décompositions. Cela en fait déjà huit.

B- 2 P divise u : Les intrus

On suppose dans cette partie que p divise u

Comme $0<x<p$ p et p+x sont premiers entre eux

L' égalité (j) montre que p divise b.

On pose $b=Kp$ comme (ff) $(p+x)b\leq 2p(2p+x)$

on a $(p+x)K\leq 2(2p+x)$ ce qui entraîne que $K<4$

de plus $2p+x\leq b$ donc K = 3.

alors $\frac{1}{p}=\frac{1}{2p+x}+\frac{1}{3p}+\frac{1}{c}$ soit $\frac{1}{3p}=\frac{1}{2(2p+x)}+\frac{1}{2c}$

on en déduit $2(2p+x)=u+3p$ soit $p+2x=u$

$u\leq v$ *et* u *divise* $(3p)^2$

les valeurs possibles de u sont : 1 , 3 , 9 , p , 3p .

ce qui donne comme $0<x<p$

$p=5$ *et* $x=2$ *et* $\frac{1}{5}=\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}$ et $p=7$ *et* $x=1$ *et* $\frac{1}{7}=\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{35}$

Ainsi les deux nombres premiers 5 et 7 donnent des intrus dans la fin de liste.

Conclusion :
Si p est premier impair $p \neq 5 \; et \; p \neq 7$, la fin de liste est exactement composée de 8 décompositions

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{2\mathrm{p}}+\frac{1}{2\mathrm{p}+1}+\frac{1}{2\mathrm{p}(2\mathrm{p}+1)} \qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{2\mathrm{p}}+\frac{1}{2\mathrm{p}+2}+\frac{1}{2\mathrm{p}(p+1)}$$

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{2\mathrm{p}}+\frac{1}{2(p+2)}+\frac{1}{p(p+2)} \qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{2\mathrm{p}}+\frac{1}{3\mathrm{p}}+\frac{1}{6\mathrm{p}} \qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{2\mathrm{p}}+\frac{1}{4\mathrm{p}}+\frac{1}{4\mathrm{p}}$$

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{2\mathrm{p}+1}+\frac{1}{2\mathrm{p}+1}+\frac{1}{p(2\mathrm{p}+1)} \qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{2\mathrm{p}+2}+\frac{1}{2\mathrm{p}+2}+\frac{1}{p(p+1)} \qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{3\mathrm{p}}+\frac{1}{3\mathrm{p}}+\frac{1}{3\mathrm{p}}$$

C- La réciproque

Réciproquement : supposons maintenant n non premier, montrons qu'il existe une décomposition entre [2n+2, 2n+2, n(n+1)] et [3n, 3n, 3n]

Si q premier divise n , $q \neq 2$ alors la décomposition

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{2\mathrm{q}+2}+\frac{1}{2\mathrm{q}+2}+\frac{1}{q(q+1)}$$

donne en multipliant les dénominateurs par $\frac{n}{q}=n'$ la décomposition

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{2\mathrm{n}+2\mathrm{n}'}+\frac{1}{2\mathrm{n}+2\mathrm{n}'}+\frac{1}{n(q+1)}$$

elle est entre les deux décompositions car $2<2\mathrm{n}'<n$

Si $n=2^k \quad avec \quad k>2$

on considère la décomposition $\frac{1}{4}=\frac{1}{2*4+2}+\frac{1}{2*4+2}+\frac{1}{4(4+1)}$

on multiplie les dénominateurs par $2^{(k-2)}$

$2^{(k-2)}*4=2^k=n$ et $2^{(k-2)}(2*4+2)=2\mathrm{n}+2^{(k-1)}$

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{2*n+2^{(k-1)}}+\frac{1}{2*n+2^{(k-1)}}+\frac{1}{5\mathrm{n}}$$

elle est entre les deux décompositions car $k>2$

pour n=4
on peut observer un intrus [10,12,15] entre les deux décompositions [10,10,20],[12,12,12]

En guise de conclusion

Un programme pour vérifier la fiabilité de Xcas pour de grands nombres. Il montre également la puissance du logiciel

On entre un nombre n (30 à 40 chiffres)
le programme cherche le nombre premier p de la forme 4m+1 qui suit le nombre n et renvoie
$simplify(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$ si il trouve une décomposition qui vérifie (E-S), 0 sinon.
Puis on vérifie que le nombre p est le bon

Le programme

```
TestXcas(n):={
local x,r,p,j,K;
p:=n;
while(p<10^60){if(irem(p-1,4)==0){if(isprime(p)==vrai){
 x:=3;
while(x<p){
K:=sort(divisors(((p+x)/4)));
j:=0;
while(j<size(K)){
if(irem(p+K[j],x)==0 ){return(simplify(1/(p+x)+1/((p+K[j])*(p+x)/x)+1/(p*(p+x)*(p+K[j])/
(x*K[j]))));}
if(irem(p+4*K[j],x)==0){return(simplify(1/(p+x)+1/(p*(p+x+4*K[j])/x)+1/(p*(p+x)*(p+x+4*K[j])/
(4*x*K[j]))));}
j:=j+1;
};
x:=x+4;}
};};
p:=nextprime(p);
}
return(0);
}:;
```

exemple

```
n:=2535705555555555555717171999999949876:;
TestXcas(n)
```

$$\frac{1}{2535705555555555555717171999999949877}$$ moins d'une seconde !

```
p:=n:;while(p<10^60){if(irem(p-1,4)==0){if(isprime(p)==vrai){return(p);};}p:=nextprime(p);}
"Done",expr("return(2535705555555555555717171999999949877)",0)
```