MATHÉMATIQUES

Correction de l'épreuve de mathématiques du BREVET (DNB) 2009

Correction proposée par :
Mr MORICEAU (Collège MONTGAILLARD)
01 juillet 2009

1° partie : Activités numériques

☑ Premier exercice :

1.

$$\begin{aligned} A &= \frac{8+3\times 4}{1+2\times 1,5} \\ &= \frac{8+12}{1+3} \\ &= \frac{20}{4} \\ A &= 5 \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{A} = 5}$$

2. Cet élève a oublié de mettre des parenthèses. En l'absence de parenthèses, la multiplication et la division sont prioritaires par rapport à l'addition et la soustraction.

Il aurait fallu que cet élève tape sur sa calculatrice la succession de touches suivantes :

$$(8 + 3 \times 4) \div (1 + 2 \times 1.5) =$$

☑ **Deuxième exercice :**

Notons R l'événement : « la bille tirée du sac est rouge » et notons $p(R)$ la probabilité de cet événement.

$$\boxed{p(R) = \frac{\text{nombre de billes rouges dans le sac}}{\text{nombre total de billes dans le sac}}}$$

• **Pour Aline :** Dans le sac d'Aline, il y a cinq boules rouges. La probabilité pour qu'Alice tire une bille rouge est égale à $\frac{5}{5}$.

La probabilité pour qu'Alice tire une bille rouge est égale à 1.

• **Pour Bernard :** Dans le sac de Bernard, il y a 40 billes : 10 billes rouges et 30 billes noires. La probabilité pour que Bernard tire une bille rouge est égale à $\frac{10}{40}$.

La probabilité pour que Bernard tire une bille rouge est égale à $0,25$ (ou $\frac{1}{4}$).

• **Pour Claude :** Dans le sac de Bernard, il y a 103 billes : 100 billes rouges et 3 billes noires. La probabilité pour que Claude tire une bille rouge est égale à $\frac{100}{103}$.

La probabilité pour que Claude tire une bille rouge est environ égale à $0,971$.

Comme $1 > 0,971 > 0,25$: c'est Aline qui a la plus grande probabilité de tirer une bille rouge de son sac.

2. On souhaite qu'Aline et Bernard aient la même probabilité de tirer une bille rouge.

Notons x le nombre de billes que l'on ajoute **avant le tirage** dans le sac d'Aline (x est un nombre positif).

Le sac d'Aline contient maintenant $x + 5$ billes (dont 5 rouges).

La probabilité pour qu'Aline tire de son sac une bille rouge est donc égale à :

$$\frac{5}{x+5}$$

.

On souhaite qu'Aline et Bernard aient la même probabilité de tirer une bille rouge, nous sommes donc amenés à résoudre l'équation suivante :

$$\frac{5}{x+5} = \frac{1}{4}$$

Un rapide produit en croix nous permet d'écrire : $x + 5 = 5 \times 4$

On trouve rapidement que $x = 20 - 5$ et donc $x = 15$.

Il faut ajouter 15 **billes rouges** dans le sac d'Aline (avant le tirage) pour que Bernard et Aline aient la même probabilité de tirer une bille rouge.

☑ **Troisième exercice :**

1. Une lecture graphique nous permet d'obtenir les coordonnées du point B :

$$B(-4; 4,6)$$

2. La courbe $\mathcal{C}_3$ coupe l'axe des abscisses en trois points d'abscisses respectives -1, 2 et 4.

3. La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.
$\mathcal{C}_1$ est une droite passant par l'origine du repère.

$\mathcal{C}_1$ est la représentation graphique d'une fonction linéaire

4. $f : x \mapsto -0,4x + 3$: f est une fonction affine, sa représentation graphique est une droite ne passant pas par l'origine du repère.

$\mathcal{C}_2$ est la représentation graphique de la fonction f

5. Tout d'abord d'un point de vue graphique : il suffit de déterminer graphiquement l'abscisse du point de la courbe $\mathcal{C}_2$ qui a une ordonnée ègale à 1.

On remarque que ce point a pour abscisse 5.

L'antécédent de 1 par la fonction f est 5

Par le calcul, nous devons déterminer le nombre a tel que $f(a) = 1$

$$\begin{aligned} f(a) &= 1 \\ -0,4a+3 &= 1 \\ -0,4a &= 1-3 \\ -0,4a &= -2 \\ 0,4a &= 2 \\ a &= \frac{2}{0,4} \\ a &= 5 \end{aligned}$$

L'antécédent de 1 par la fonction f est 5

6. Graphiquement, on remarque que le point A de coordonnées $(4,6;1,2)$ n'appartient pas à la courbe $\mathcal{C}_2$.

Mais, montrons le par le calcul. Pour cela, calculons l'image de 4, 6 par la fonction f.

$f(x) = -0,4x+3$, ainsi $f(4,6) = -0,4 \times 4,6 + 3 = 1,16$

Comme $1,16 \neq 1,2$; le point A de coordonnées $(4,6;1,2)$ n'appartient pas à la courbe $\mathcal{C}_2$.

2° partie : Activités géométriques

✓ Premier exercice :

1. a) Je vous laisse le soin de dessiner le triangle ABC à l'aide d'une règle et d'un compas.

b) Si le triangle ABC était un triangle rectangle en C alors d'après le théorème de PYTHAGORE, nous pourrions écrire que

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

.

Or $AB^2 = 16^2 = 256$ et $AC^2 + BC^2 = 14^2 + 8^2 = 260$.

Comme $256 \neq 260$ alors $AB^2 \neq AC^2 + BC^2$

En conclusion, nous pouvons dire que le triangle ABC n'est pas rectangle en C. (contraposée du thèorème de PYTHAGORE)

2. Notons p le périmètre du triangle ABC.

$$p = AB + AC + BC = 16 + 14 + 8 = 38$$

.

Ainsi $p = 38$ cm.

Notons a la longueur BC, b la longueur AC et c la longueur AB.

Nous avons donc : $p = 38$ cm, $a = 8$ cm, $b = 14$ cm et $c = 16$ cm.

L'aire d'un triangle de périmètre p et qui a des cotés de longueurs a, b et c est :

$$\mathcal{A} = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)}$$

Pour le triangle ABC,

$$\begin{cases} \frac{p}{2} &= \frac{38}{2} = 19 \\ \frac{p}{2} - a &= 19 - 8 = 11 \\ \frac{p}{2} - b &= 19 - 14 = 5 \\ \frac{p}{2} - c &= 19 - 16 = 3 \end{cases}$$

L'aire du triangle ABC est : $\mathcal{A} = \sqrt{19 \times 11 \times 5 \times 3}$

Donc, $\mathcal{A} = \sqrt{3135} \approx 56$

$$\boxed{\text{L'aire du triangle } ABC \text{ est environ égale à } 56 \text{ cm}^2}$$

☑ **Deuxième exercice :**

Partie 1 :

1. Je vous laisse le soin de dessiner le triangle ABC à l'aide d'une règle et d'un compas.

2. Comme le triangle ABC est isocèle en A alors $AB = AC = 4$ cm.

Comme E est le symétrique du point B par rapport au point A alors $AE = AB = 4$ cm.

Ainsi, $AB = AE = AC = 4$ cm. Donc, les points B, C et E appartiennent au cercle de centre A et de rayon 4 cm.

Comme E est le symétrique du point B par rapport au point A alors A est le milieu de $[BE]$.

Donc, le point C appartient au cercle de centre A et de diamètre $[BE]$.

Le triangle BCE est inscrit dans le cercle de diamètre $[BE]$ donc ce triangle est rectangle et admet pour hypoténuse le diamètre $[BE]$. Par conséquent, le triangle BCE est rectangle en C.

$$\boxed{\text{le triangle } BCE \text{ est rectangle en } C}$$

3. L'angle $\widehat{EAC}$ est un **angle au centre**, cet angle intercepte l'arc de cercle $\overset{\frown}{EC}$

Comme $A \in [EB]$, les angles $\widehat{EBC}$ et $\widehat{ABC}$ ont même mesure.

Nous pouvons donc écrire que l'angle $\widehat{ABC}$ (car $\widehat{ABC} = \widehat{EBC}$) est un **angle inscrit** dans le cercle de diamètre $[BC]$, cet angle intercepte l'arc de cercle $\overset{\frown}{EC}$

Donc, les deux angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{EBC}$ interceptent ***le même arc de cercle*** $\overset{\frown}{EC}$.

Dans ce cas, nous savons que :
Si (dans un cercle) un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc de cercle alors la mesure de l'angle au centre est le double de la mesure de l'angle inscrit.

On a donc : $\widehat{EAC} = 2 \times \widehat{ABC} = 2 \times 43 = 86$.

$$\boxed{\text{L'angle } \widehat{EAC} \text{ mesure } 86^\circ}$$

<u>Partie 2 :</u>

Dans cette partie, la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ n'est pas donnée.

Comme dans la partie 1, nous pouvons écrire que :

L'angle $\widehat{EAC}$ est un **angle au centre**, cet angle intercepte l'arc de cercle $\overset{\frown}{EC}$

Comme $A \in [EB]$, les angles $\widehat{EBC}$ et $\widehat{ABC}$ ont même mesure.

Nous pouvons donc écrire que l'angle $\widehat{ABC}$ (car $\widehat{ABC} = \widehat{EBC}$) est un **angle inscrit** dans le cercle de diamètre $[BC]$, cet angle intercepte l'arc de cercle $\overset{\frown}{EC}$

Donc, les deux angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{EBC}$ interceptent ***le même arc de cercle*** $\overset{\frown}{EC}$.

Dans ce cas, nous savons que :

Si (dans un cercle) un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc de cercle alors la mesure de l'angle au centre est le double de la mesure de l'angle inscrit.

On a donc :

$$\widehat{EAC} = 2 \times \widehat{ABC}$$

Jean a raison.

3° partie : Problème

Partie 1 :

1. Démontrons que le triangle ABC est rectangle en C.

$$\left.\begin{array}{rcl} AB^2 & = & 17,5^2 = 306,25 \\ BC^2 + AC^2 & = & 14^2 + 10,5^2 = 306,25 \end{array}\right\} \text{donc } AB^2 = BC^2 + AC^2$$

D'après la réciproque du théorème de PYTHAGORE, on peut dire que le triangle ABC est rectangle en C.

$$\boxed{\text{le triangle } ABC \text{ est rectangle en } C}$$

2. Par construction du point R et du point S, nous pouvons dire que les droites (BC) et (RS) sont parallèles et les droites (AC) et (RP) sont parallèles.

Comme le point P appartient au segment $[BC]$ alors les droites (PC) et (RS) sont parallèles et comme le point S appartient au segment $[AC]$ alors les droites (SC) et (RP) sont parallèles.

- le segment $[PR]$ est parallèle au segment $[SC]$
- le segment $[RS]$ est parallèle au segment $[PC]$

Le quadrilatère $PRSC$ a des côtés opposés parallèles deux à deux.

Par conséquent, le quadrilatère $PRSC$ **est un parallélogramme**.

Le triangle ABC est rectangle en C donc $(AC)\perp(BC)$. Comme le point P appartient au segment $[BC]$ et le point S appartient au segment $[AC]$ alors **l'angle** $\widehat{PCS}$ **est un angle droit**.

Le parallélogramme $PRSC$ possède un angle droit.

Nous savons que si un parallélogramme a un angle droit alors ce parallélogramme est un rectangle (propriété vue en classe de 5°).

En conclusion : le quadrilatère $PRSC$ est un rectangle

3. a)
- Les droites (AB) et (BC) sont sécantes en B.
- Les points B, R et A sont alignés.
- Les points B, P et C sont alignés.
- Les droites (RP) et (AC) sont parallèles.

Nous pouvons donc appliquer le théorème de THALÈS et écrire :

$$\frac{BR}{BA} = \frac{BP}{BC} = \frac{PR}{AC}$$

d'où :

$$\frac{BR}{17,5} = \frac{5}{14} = \frac{PR}{10,5}$$

Pour calculer PR, utilisons

$$\frac{PR}{10,5} = \frac{5}{14}$$

Donc,

$$PR = \frac{5 \times 10,5}{14} = 3,75$$

La longueur PR est égale à $3,75$ cm

b) Notons $\mathcal{A}$ l'aire du rectangle $PRSC$.

$$\mathcal{A} = PR \times PC$$

Comme P appartient au segment $[BC]$ alors $BP + PC = BC$

Ainsi, $PC = BC - BP = 14 - 5 = 9$.

La longueur PC mesure 9 cm.
Donc,

$$\mathcal{A} = PR \times PC = 3,75 \times 9 = 33,75$$

L'aire du rectangle $PRSC$ est ègale à $33,75$ cm^2

Partie 2 :

1.

Longueur BP (en cm)	0	1	3	5	8	10	12	14
Aire de $PRSC$ (en cm^2)	0	9,75	24,75	33,75	36	30	18	0

Prouvons que si $BP = 10$ cm alors l'aire du rectangle $PRSC$ est égale à 30 cm^2.

- Les droites (AB) et (BC) sont sécantes en B.
- Les points B, R et A sont alignés.
- Les points B, P et C sont alignés.
- Les droites (RP) et (AC) sont parallèles.

Nous pouvons donc appliquer le théorème de THALÈS et écrire :

$$\frac{BR}{BA} = \frac{BP}{BC} = \frac{PR}{AC}$$

d'où :

$$\frac{BR}{17,5} = \frac{10}{14} = \frac{PR}{10,5}$$

Pour calculer PR, utilisons

$$\frac{PR}{10,5} = \frac{10}{14}$$

Donc,

$$PR = \frac{10 \times 10,5}{14} = 7,5$$

La longueur PR est égale à $7,5$ cm

Notons $\mathcal{A}$ l'aire du rectangle $PRSC$.

$$\mathcal{A} = PR \times PC$$

Comme P appartient au segment $[BC]$ alors $BP + PC = BC$

Ainsi, $PC = BC - BP = 14 - 10 = 4$.

La longueur PC mesure 4 cm.
Donc,

$$\mathcal{A} = PR \times PC = 7,5 \times 4 = 30$$

$\boxed{\text{Si } BP = 10 \text{ cm alors l'aire du rectangle } PRSC \text{ est égale à } 30 \text{ cm}^2}$

2. Par lecture graphique,

Notons $\mathcal{C}$ la courbe représentative de l'aire du rectangle $PRSC$ en fonction de la longueur BP.

a) Pour répondre à la question, il suffit de déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}$ qui ont une ordonnée égale à 18 cm^2.

Il y a deux points de la courbe $\mathcal{C}$ qui ont une ordonnée égale à 18 cm^2, ces deux points ont pour abscisses respectives 2 (cm) et 12 (cm).

Les valeurs de BP pour lesquelles le rectangle $PRSC$ a une aire de 18 cm^2 sont : $BP = 2$ cm et $BP = 12$ cm

b) Notons h la fonction qui à toute valeur de BP associe la valeur de l'aire du rectangle $PRSC$.

Nous cherchons l'antécédent de la valeur maximale de l'aire par la fonction h, cet antécédent est égal à 7 (cm)

La valeur de BP pour laquelle le rectangle $PRSC$ a une aire qui semble maximale est $BP = 7$ cm

c) L'image de 7 par la fonction h est une valeur comprise entre 36 cm^2 et 37 cm^2.

Un encadrement à 1 cm^2 près de l'aire maximale du rectangle $PRSC$ est :

$$36 < \mathcal{A}_{\text{max}} < 37$$

Partie 3 :

1. Comme P appartient au segment $[BC]$ alors $BP + PC = BC$

Ainsi, $PC = BC - BP = 14 - BP$.

$$\boxed{PC = 14 - BP}$$

2. En raisonnant comme nous l'avons fait dans la partie 1, nous pouvons écrire :

- Les droites (AB) et (BC) sont sécantes en B.
- Les points B, R et A sont alignés.
- Les points B, P et C sont alignés.

• Les droites (RP) et (AC) sont parallèles.

Nous pouvons donc appliquer le théorème de THALÈS et écrire :

$$\frac{BR}{BA} = \frac{BP}{BC} = \frac{PR}{AC}$$

d'où :

$$\frac{BR}{17,5} = \frac{BP}{14} = \frac{PR}{10,5}$$

Pour calculer PR, utilisons

$$\frac{PR}{10,5} = \frac{BP}{14}$$

Donc,

$$PR = \frac{10,5 \times BP}{14} = \frac{10,5}{14} \times BP$$

Or

$$\frac{10,5}{14} = \frac{7 \times 1,5}{7 \times 2} = \frac{1,5}{2} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$\boxed{PR \text{ est égale à } 0,75 \times BP \ \ (\text{cm})}$$

3. Le rectangle $PRSC$ est un carré si : $PR = PC$.

D'après les questions précédentes, on a vu que $PC = 14 - BP$ et $PR = 0,75 \times BP$.

Le rectangle $PRSC$ est un carré si : $0,75 \times BP = 14 - BP$

Notons x la longueur BP.

Nous sommes amenés à résoudre l'équation : $0,75x = 14 - x$

$$\begin{aligned} 0,75x &= 14 - x \\ 0,75x + x &= 14 \\ 1,75x &= 14 \\ x &= \frac{14}{1,75} \\ x &= 8 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le rectangle } PRSC \text{ est un carré si } BP = 8 \text{ cm}}$$