

Session 2017

PE2-17-PG1

Repère à reporter sur la copie

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ÉCOLES

Vendredi 21 avril 2017
Deuxième épreuve d'admissibilité

Mathématiques

Durée : 4 heures
Épreuve notée sur 40

Rappel de la notation :

- première partie : **13 points**
- deuxième partie : **13 points**
- troisième partie : **14 points**

5 points au maximum pourront être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.

Une note **globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire.**

Ce sujet contient 10 pages, numérotées de 1 à 10. Assurez-vous que cet exemplaire est complet. S'il est incomplet, demandez un autre exemplaire au chef de salle.

L'usage de la calculatrice électronique de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante est autorisé.

L'usage de tout autre matériel électronique, de tout ouvrage de référence et de tout document est rigoureusement interdit.

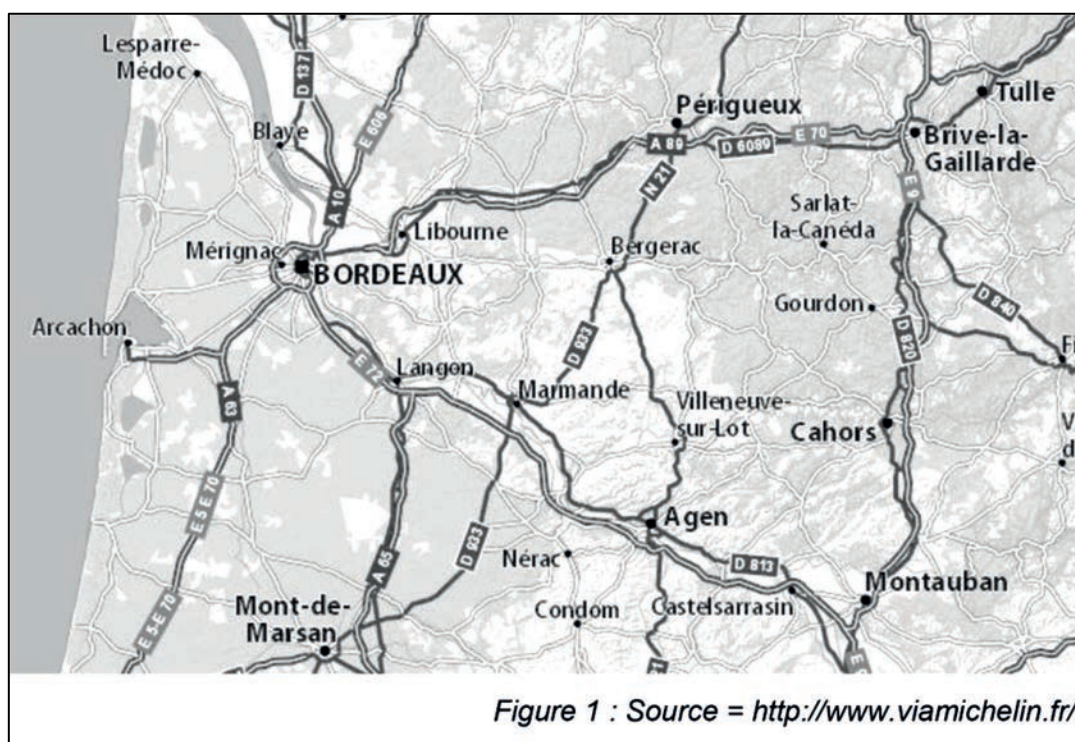
N.B : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine etc. Tout manquement à cette règle entraîne l'élimination du candidat.

Si vous estimez que le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes comporte une erreur, signalez lisiblement votre remarque dans votre copie et poursuivez l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

PREMIÈRE PARTIE (13 points)

Présentation du problème

Une entreprise de BTP est mandatée pour étudier la faisabilité de la réalisation d'une portion d'autoroute et d'un nouvel échangeur dans la région de Bordeaux / Brive-la-Gaillarde / Montauban.



1) Représentation géométrique

À vol d'oiseau, il y a 204,4 km entre Brive-la-Gaillarde et Bordeaux, 210 km entre Bordeaux et Montauban et 145,6 km entre Montauban et Brive-la-Gaillarde.

On admet que cette situation géographique est modélisée par un triangle ABC, construit à une certaine échelle, dans lequel A représente Bordeaux, B représente Brive-la-Gaillarde et C représente Montauban.

Dans ce triangle, la longueur AB est 7,3 cm.

- Montrer que la longueur AC est 7,5 cm et que la longueur BC est 5,2 cm.
- Construire le triangle ABC.
- Déterminer l'échelle utilisée pour modéliser la situation.

2) Étude de faisabilité

Dans le cadre d'un projet d'extension, la société d'exploitation mandate une entreprise de BTP pour étudier la construction d'une portion d'autoroute reliant Brive-la-Gaillarde et l'autoroute entre Bordeaux et Montauban. On cherche à construire la portion d'autoroute la plus courte possible.

Sur la figure construite précédemment, on note D le point du segment [AC] tel que la distance BD soit la plus courte possible. Le point D représente l'emplacement de l'échangeur à construire.

- a) Placer le point D sur la figure et indiquer ce que représente la droite (BD) dans le triangle ABC.
- b) Les formules trigonométriques et un théorème appelé théorème d'Al Kashi permettent d'établir l'égalité (admise) :
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AC \times AD.$$
En utilisant l'égalité ci-dessus, montrer que $AD = 5,5$ cm.
- c) En déduire les longueurs CD et BD.

3) Validation du projet

Il s'avère que l'échangeur ne peut être placé à cet endroit car il serait situé dans une zone protégée.

Sur la figure construite précédemment, E désignera l'emplacement définitivement choisi pour l'échangeur et donc [BE] la portion d'autoroute à réaliser.

On appelle E le point du segment [AD] tel que [ED] mesure 0,9 cm.

- a) Déterminer la mesure en degré, arrondie au centième de degré, de l'angle \widehat{DBE} .
- b) Calculer la longueur BE, arrondie au centième de centimètre.
- c) En déduire la longueur, en kilomètre, arrondie au dixième de kilomètre près, de la portion d'autoroute qui sera réalisée.

4) Tarification

Après validation, le projet a été réalisé. La société d'exploitation des autoroutes propose des badges à ses usagers.

Mme Dupuis, enseignante à Brive, emprunte cette nouvelle portion d'autoroute chaque jour, matin et soir. Elle hésite entre les deux propositions suivantes :

| Tarif 1 | Tarif 2 |
|--------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Sans badge, un aller simple coûte 12,40 €. | Un badge coûte 30 € par an et donne lieu à une réduction de 20 % par aller simple. |

- a) Le graphique ci-dessous représente le coût global pour chaque tarif en fonction du nombre d'allers simples effectués.

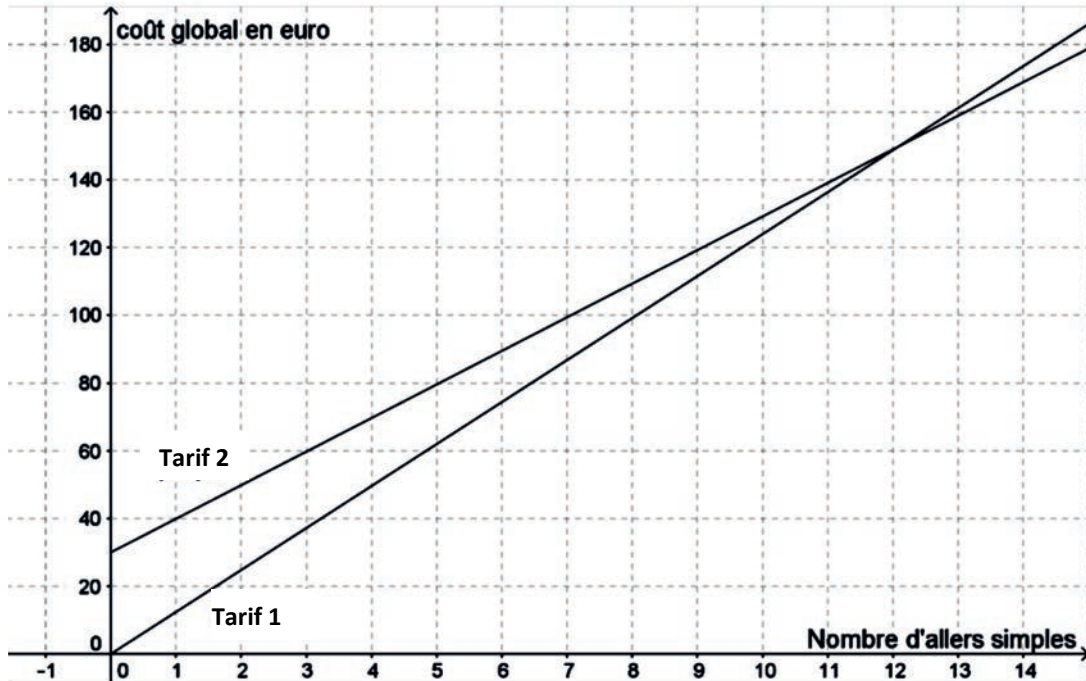


Figure 1: Coût global en euro en fonction du nombre d'allers simples

Déterminer graphiquement à partir de combien d'allers simples le tarif 2 devient le plus avantageux.

- b) Exprimer en fonction du nombre d'allers simples x le coût global $f(x)$, en euro, selon le tarif 1.
- c) Exprimer en fonction du nombre d'allers simples x le coût global $g(x)$, en euro, selon le tarif 2.
- d) Retrouver par le calcul à partir de combien d'allers simples le tarif 2 devient le plus avantageux.

5) Les dangers de l'autoroute

Information :

Pour un véhicule, la distance d'arrêt D_a correspond à la somme de la distance de réaction D_r et la distance de freinage D_f :

$$D_a = D_r + D_f$$

La distance de réaction D_r est la distance parcourue par le véhicule pendant le temps que met le conducteur pour réagir. Le temps de réaction est d'une seconde pour un conducteur en bonne forme et de deux secondes pour un conducteur fatigué.

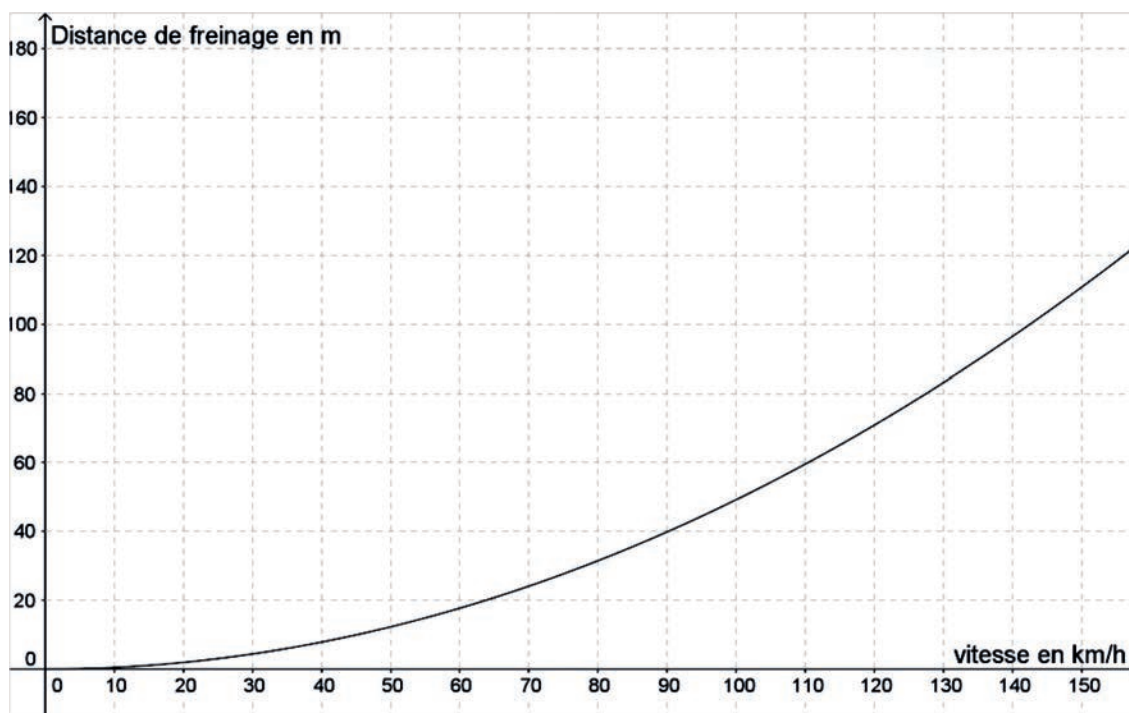
La distance de freinage, exprimée en mètre, est donnée par la formule $D_f = \frac{v^2}{254 \times C_{fl}}$, où v est la vitesse en kilomètre par heure et C_{fl} désigne le coefficient de frottement longitudinal. La distance obtenue est exprimée en mètre.

On admet que le coefficient C_{fl} vaut 0,8 sur route sèche et que sur route mouillée, ce coefficient est divisé par deux.

inspiré de : http://www.discip.crdp.ac-caen.fr/phch/college/troisieme/cours/distance_arret/Distance_arret.pdf

Une voiture roule à 120 km/h sur l'autoroute. La chaussée est sèche et le conducteur est fatigué. Tout à coup, un cerf surgit sur la voie et s'arrête, tétanisé par les feux de la voiture. L'animal se trouve à 150 m de la voiture.

- Calculer la distance de réaction D_r , arrondie au dixième de mètre, pour cette voiture conduite par un conducteur fatigué.
- On donne ci-dessous la courbe correspondant à la distance de freinage D_f sur route sèche en fonction de la vitesse. Indiquer si la collision avec le cerf pourra être évitée. Justifier.



Distance de freinage en mètre, en fonction de la vitesse en km/h.

- Exprimer une formule à écrire dans la cellule B3 du tableur ci-contre pour calculer la distance de freinage D_f , en mètre, formule que l'on fera ensuite glisser pour l'étendre aux autres cellules de la colonne B dans le tableur.

| | A | B |
|----|-------------------------------------|-----------|
| 1 | Distance de freinage Route sèche | |
| 2 | V (km / h) | D_f (m) |
| 3 | 10 | |
| 4 | 20 | |
| 5 | 30 | |
| 6 | 40 | |
| 7 | 50 | |
| 8 | 60 | |
| 9 | 70 | |
| 10 | 80 | |
| 11 | 90 | |
| 12 | 100 | |
| 13 | 110 | |
| 14 | 120 | |
| 15 | 130 | |
| 16 | | |

DEUXIÈME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1 :

Au mois de février 2017, on a interrogé 12 527 personnes de plus de 15 ans à la sortie du métro, à propos du nombre de fois où elles sont allées au restaurant pendant le mois de janvier 2017. Chaque personne sondée est enregistrée par un numéro, de 1 à 12 527. Le tableau ci-dessous présente des résultats, selon la classe d'âge des personnes interrogées.

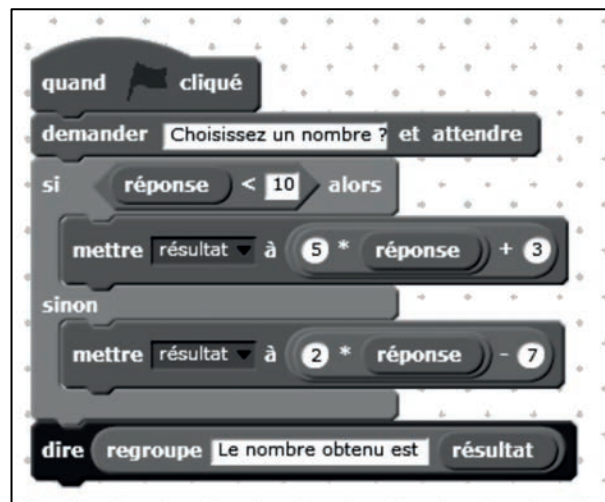
| | De 15 à 25 ans | De 26 à 44 ans | De 45 à 60 ans | Plus de 60 ans | TOTAL |
|---------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------|
| Pas du tout | | 82 | 415 | 147 | 666 |
| Une fois | 682 | | 1243 | 589 | |
| Deux fois | | 634 | 552 | 138 | 1737 |
| Trois fois | 174 | 95 | | | 1907 |
| Quatre fois ou plus | 251 | 418 | 923 | 317 | |
| TOTAL | 1542 | | 3517 | 2445 | |

1. Reproduire et compléter le tableau ci-dessus.
2. On tire au hasard un des numéros correspondant aux personnes interrogées, en supposant que chacun a la même probabilité d'être choisi.
 - a) Déterminer la probabilité que ce numéro corresponde à une personne qui est allée exactement deux fois au restaurant pendant le mois de janvier 2017.
 - b) Déterminer la probabilité que ce numéro corresponde à une personne qui a moins de 45 ans.
 - c) Déterminer la probabilité que ce numéro corresponde à une personne qui a plus de 60 ans et qui est allée au moins trois fois au restaurant pendant le mois de janvier 2017.

EXERCICE 2 :

On utilise le programme ci-contre.

1. Quel résultat s'affiche si l'on choisit d'entrer le nombre 7 ?
2. Quel résultat s'affiche si l'on choisit d'entrer le nombre 12,7 ?
3. Quel résultat s'affiche si l'on choisit d'entrer le nombre -6 ?



EXERCICE 3 :

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

Une réponse exacte, mais non justifiée, ne rapporte aucun point. Une réponse fausse n'enlève pas de point.

1. **Affirmation** : « 117 est un nombre premier. »

2.
 - a) **Affirmation** : « Pour n'importe quel nombre entier n , $(n+2)^2 - (n-2)^2$ est un multiple de 8. »
 - b) **Affirmation** : « Pour n'importe quel nombre entier n , $(n+2)^2 - (n-2)^2$ est un multiple de 32. »

3. **Affirmation** : « Il existe au moins un nombre entier pair supérieur à 7, divisible par 3 mais divisible ni par 9 ni par 4. »

4. **Affirmation** : « 6 est l'unique solution de l'équation $(x - 7)(x + 4) = (x - 7)(16 - x)$. »

5. On réduit respectivement la largeur et la longueur d'un rectangle de 20% et 10%.
Affirmation : « L'aire du rectangle ainsi obtenu a diminué de 28%. »

6. Un rectangle a une largeur et une longueur qui mesurent respectivement 6 cm et 9 cm. On réduit la largeur de 20% et la longueur de 10%.
Affirmation : « Le périmètre du rectangle ainsi obtenu a diminué de 15%. »

TROISIÈME PARTIE (14 points)

Cette partie est composée de trois situations indépendantes.

SITUATION 1

Dans une classe de maternelle, une enseignante donne à un groupe d'élèves la consigne suivante :

« J'ai installé trois poupées avec leur assiette autour de cette table pour le goûter. Elles pourront commencer leur goûter quand il y aura un biscuit dans l'assiette de la poupée blonde, un biscuit dans l'assiette de la poupée brune et un biscuit dans l'assiette de la poupée rousse.

Les biscuits du goûter se trouvent dans une boîte dans le coin cuisine.

Vous devez aller chercher juste ce qu'il faut de biscuits pour le goûter des poupées. Vous pouvez faire plusieurs voyages. »

La table des poupées est éloignée de quelques mètres du coin cuisine.
L'information suivante « la boîte contient 5 biscuits » n'est pas donnée aux élèves.
On appelle « voyage » un aller au coin cuisine et un retour à la table des poupées.

- L'élève A a effectué 3 voyages, rapportant un seul biscuit à chaque fois.
- L'élève B a effectué 1 voyage. Il utilise sa main droite dont il abaisse deux doigts. Il se déplace à la table du coin cuisine et revient avec 3 biscuits dans la main gauche.
- L'élève C effectue très rapidement 1 voyage. Il a pris 3 biscuits.
- L'élève D effectue 2 voyages. Au premier voyage il ramène tous les biscuits. Au deuxième il rapporte 2 biscuits à la cuisine.

1. Quel aspect du nombre est mobilisé dans cette situation ?
2. Analyser les stratégies mises en œuvre par chacun des élèves.
3. Proposer une modification interne à l'énoncé de la situation susceptible d'engager les élèves A et D à évoluer dans la construction du nombre. Expliciter cette évolution.

SITUATION 2 :

L'exercice ci-dessous est extrait des évaluations nationales CM2 de 2012.

Il faut 9 litres d'huile pour remplir complètement 5 bidons identiques.

Quelle est la contenance, en litre, de chacun de ces bidons ?

1. Quelle opération permet de répondre à cette question ?

2. Voici les productions de trois élèves Julia, Karima et Louis. Pour chacune d'entre elles, expliquer la procédure utilisée.

Julia

Utilise ce cadre pour faire tes recherches.

9 litres 5 bidons

|| || ||||| | | |

4 litres = 8 demis

Réponse 1,5 litres et reste 3 demis litres

Karima

Utilise ce cadre pour faire tes recherches.

~~2,5~~ 4 2,2 9/5 1,4

+ 2,5 + 2,2 4/1 + 1,4

+ 2,5 + 2,2 + 1,4

+ 2,5 + 2,2 + 1,4

+ 2,5 + 2,2 + 1,4

5 0 4

Réponse : ~~Il faut 1,5~~ Il faut 1,4 litre

Louis

Utilise ce cadre pour faire tes recherches.

$\begin{array}{r} 5 \\ \times 1,5 \\ \hline 7,5 \end{array}$ $\begin{array}{r} 5 \\ \times 1,75 \\ \hline 8,75 \end{array}$ $\begin{array}{r} 5 \\ \times 2 \\ \hline 10 \end{array}$ $\begin{array}{r} 5 \\ \times 180 \\ \hline 9,00 \end{array}$

Réponse 1,80 litre.....

3. Quelles modifications, concernant les nombres en jeu dans l'exercice, peut proposer l'enseignant à Louis pour l'encourager à changer de procédure ?

SITUATION 3

L'exercice ci-dessous est extrait des évaluations nationales CM2 de 2008.

Pour faire des crêpes pour 6 personnes, il faut :

- 250 g de farine
- 1 litre de lait
- 4 œufs
- 1 cuillerée à soupe d'huile
- 2 pincées de sel.

Calcule la quantité de chacun des ingrédients nécessaire pour faire des crêpes pour 9 personnes.

Voici les productions de trois élèves :

Elève A Tu peux faire tes calculs à droite du tableau.

| | | |
|--------------------------------------------|---|----------------------------|
| ...3.75...g de farine | - | 250g + 485g = 375g |
| ...1.5...litre(s) de lait | - | 1 + sa moitié = 1,5 litres |
| ...6...œufs | - | 4 + 2 = 6 œufs |
| ...1 et 1/2...cuillerée(s) à soupe d'huile | - | 1 + sa moitié = 1 et 1/2 |
| ...3...pincées de sel | - | 2 + 1 = 3 pincées |

Je fais à chaque fois le nombre + sa moitié parce que 6 + sa moitié font 9.

Elève B Tu peux faire tes calculs à droite du tableau.

| | | |
|-----------------------------------|--|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 374,4g de farine | | $250 \overline{) 6}$ |
|litre(s) de lait | | $\begin{array}{r} -24 \\ \hline 70 \\ 6 \\ \hline 40 \\ -36 \\ \hline 4 \end{array}$ |
|œufs | | $\begin{array}{r} 2 \\ \hline 6 \\ -2 \\ \hline 0 \end{array}$ |
|cuillerée(s) à soupe d'huile | | $\begin{array}{r} 41,6 \\ \times 3 \\ \hline 374,4 \end{array}$ |
| ...3...pincées de sel | | $\begin{array}{r} 11 \\ - \\ \hline \end{array}$ |

Elève C

| | | |
|-----------------------------------|--|--------------------------------------------------------------------------|
| 373.g de farine | | $250 \overline{) 6}$ |
|litre(s) de lait | | $\begin{array}{r} 10 \\ \hline 4 \end{array}$ |
|œufs | | $\begin{array}{r} 250 \\ + 41 \\ + 41 \\ + 41 \\ \hline 373 \end{array}$ |
|cuillerée(s) à soupe d'huile | | |
|pincées de sel | | |

1. Quelle est la principale notion du programme sur laquelle cet exercice permet de revenir ?
2. Expliciter les procédures utilisées pour le calcul de la masse de farine nécessaire par chacun des élèves A, B et C.
3. En quoi le choix de 300 g de farine nécessaires au lieu de 250 g aurait-il pu modifier les procédures proposées par les élèves ?