

<http://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article961>



Développement de π en fractions continues et polynômes de Lagrange

- Culture mathématique
Date de mise en ligne : jeudi 1er février 2018
- Approfondissement des connaissances

Copyright © IREM de la Réunion - Tous droits réservés

Développement de \sqrt{d} en fractions continues et division euclidienne

La division euclidienne permet pour un nombre rationnel de trouver son développement en fractions continues. Nous montrons dans le texte qui suit que c'est également le cas pour une autre famille de nombres réels : les nombres irrationnels de la forme \sqrt{d} , lorsque d est un entier naturel non carré. Hormis le premier, les coefficients du développement apparaissent comme des quotients de divisions euclidiennes. Nous pourrions ainsi, pour cette catégorie particulière de nombres, retrouver de manière élémentaire les principales propriétés du développement.

[\[PDF - 201.1 ko\]](http://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/seguin_fractions_continues.pdf "PDF - 201.1 ko") **Développement de \sqrt{d} en fractions continues et division euclidienne**

Les polynômes de Lagrange et leurs secrets

Ce texte est la suite de l'article [Deux défis de Pierre Fermat](#) dans lequel l'outil du développement en fractions continues d'un irrationnel nous a permis, avec l'aide du logiciel Xcas, de mettre en évidence des solutions de l'équation $x^2 - dy^2 = 1$. Nous avons alors conjecturé l'existence d'une solution non triviale pour toute valeur de d . Cette conjecture a été transformée en théorème au XVIII^e siècle par les travaux de Joseph Lagrange sur le développement en fractions continues, travaux qui portent sur l'ensemble des nombres irrationnels quadratiques.

Afin de rester proche de l'équation proposée par Fermat, nous nous limitons aux irrationnels de la forme \sqrt{d} , lorsque d est un nombre entier naturel non carré. Notre objectif est de montrer comment les polynômes de Lagrange vont nous permettre dans ce cas particulier de redécouvrir les deux résultats importants suivants :

- L'équation de Fermat pour d entier naturel non carré admet toujours une solution non triviale.
- Le développement en fractions continues de \sqrt{d} est ultimement périodique. Une observation de ces polynômes sur des exemples va nous permettre de découvrir une relation entre développement en fractions continues et division euclidienne.

[\[PDF - 651.5 ko\]](http://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/seguin_lagrange.pdf "PDF - 651.5 ko") **Les polynômes de Lagrange et leurs secrets**