

Faut-il démontrer pour savoir ?

Olivier Muzereau

23 juin 2016

Remerciements.

Mes remerciements vont à Stéphane Gombaudo et Alain Busser pour leur relectures du texte en un temps record ainsi que leurs remarques qui ont permis d'en clarifier certains passages.

Introduction.

Le sujet 2 de philosophie de la section scientifique proposé au baccalauréat ne peut pas ne pas susciter l'intérêt du mathématicien : faut-il démontrer pour savoir ?

Le polysémie du mot *savoir* ouvre la voie aux réponses négatives à la question. Bon nombre de corrections¹ du sujet proposées à ce jour sur le web exhiberont à cette fin des savoirs par le cœur ou la foi (Pascal), des savoirs intuitifs (Descartes), des savoirs poétiques (G. Bachelard), des savoirs artistiques (Kant ou encore Schopenhauer).

Le mot *démonstration* quant à lui ne semble pas soulever de difficultés particulières dans les corrections précédentes. Quand certains prennent le temps de l'explicitier, c'est au sens de "ce qui établit la nécessité d'une vérité" ou encore d'une "longue chaîne de raisons".

Enfin, la forme même de la question (*faut-il démontrer pour savoir ?*) amène à la reformuler ainsi : *est-il nécessaire de démontrer pour savoir ?*

Remarquons tout d'abord que la question n'est pas *est-il suffisant de démontrer pour savoir ?* Quoique intéressant, ce questionnement passe à côté de ce qui est demandé².

Par ailleurs, les démarches précédemment citées prennent le parti de fournir des contre-exemples situés hors du champ du savoir accessible à la démonstration pour délimiter la portée de celle-ci au sein de celui-là. En cela, ces démarches répondent bien à la question.

Jouer sur les ambiguïtés du mot *savoir* reste cependant assez frustrant pour le mathématicien. On élude en effet par là la question qui le taraude personnellement : *faut-il démontrer pour savoir mathématiquement ?* Ou mieux : *Quel savoir est caractérisé par le fait qu'il est démontré ?* Une réponse claire à cette question aura pour corollaire trivial l'élimination de toutes les difficultés du sujet initial.

Nous interrogerons à cette fin l'évolution du concept de démonstration tel qu'il a été employé par trois auteurs qui furent en leurs temps, soit des scientifiques, soit des penseurs de la science.

1. On pourra consulter à profit sur ces sujets les pages suivantes :
<https://www.youtube.com/watch?v=OLLFGm1Z398>
https://www.youtube.com/watch?v=j_a0BKx7aY
<http://www.philomag.com/bac-philo/copies-de-reves/faut-il-demontrer-pour-savoir-16311>

2. C'est un travers que certains n'ont apparemment pas su éviter malgré toute l'admiration que nous leur portons. Cf. <https://www.youtube.com/watch?v=vlfKWWIDTbc>

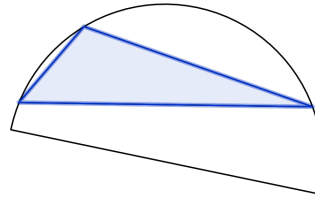
1 Aristote : démontrer c'est savoir ce qui fait que l'objet qui est, est ce qu'il est.

La démonstration en tant que telle est abordée par Aristote dans ses Seconds Analytiques. Au chapitre II, il précise ainsi :

”Nous pensons *savoir scientifiquement* (ἐπίστασθαι) les choses... quand nous pensons savoir (γινώσκειν) que la cause par laquelle la chose existe, est bien la cause de cette chose, et que par suite nous pensons que la chose ne saurait être autrement que nous la savons... j'appelle démonstration (ἀπόδειξις) le syllogisme qui produit la science : celui qui par cela seul que nous le possédons, nous fait savoir (ἐπιστάμεθα) quelque chose.”

Il ressort de là que pour Aristote, savoir scientifiquement, c'est à la fois connaître l'existence d'une chose et connaître par syllogisme ce qui fait qu'une chose est ce qu'elle est.

Ainsi, au chapitre I du même livre, Aristote dit que pour savoir scientifiquement que la figure ci-contre, inscrite dans un demi-cercle, a la somme de ses angles égaux à deux droits, on doit effectuer un syllogisme du type :



Tous les triangles ont nécessairement les sommes de leurs angles égaux à deux droits.

La figure ci-contre est un triangle.

Donc la figure ci-contre a la somme de ses angles égaux à deux droits.

Démontrer, c'est effectuer un syllogisme basé sur deux prémisses qui sont nécessaires à la conclusion.

L'une des prémisses est la donnée d'une caractéristique propre d'un certain moyen terme : la somme des angles qui vaut deux droits est une caractéristique propre de l'objet triangle.

L'autre prémisses identifie *la chose qui est* comme cas particulier de ce moyen terme : l'objet de la figure *construit* sous mes yeux est un triangle.

Les moyens termes peuvent être multipliés mais on doit toujours partir de la chose qui est.

On peut encore citer Aristote (*ibid*) :

”D'une chose dont on ne sait pas absolument qu'elle existe, comment pourrait-on savoir absolument qu'elle a ses angles égaux à deux angles droits?”

Cette condition méthodique qui consiste à partir d'un donné est d'ailleurs caractéristique de l'ouverture des *éléments* d'Euclide où des postulats du type "conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque" ou encore "d'un point quelconque et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence d'un cercle" ne sont rien d'autre que des demandes d'autorisations d'utilisation des instruments de la géométrie (règle, compas), pour construire des figures sur lesquelles ont va raisonner.

Ce besoin de partir de la chose pour démontrer explique d'ailleurs les définitions du début des *éléments* suivant lesquelles "le point est ce qui n'a pas de parties", "la ligne est une longueur sans largeur" etc. Définitions qui tentent de préciser ce qu'est la chose qui est visée avant de l'utiliser comme base des démonstrations.

On sait l'histoire malheureuse de cette conception de la démonstration : il semble impossible de saisir une chose qui est effectivement en n'ayant recours qu'à des définitions. Les géométries non euclidiennes ont su proposer d'autres objets répondant parfaitement aux définitions d'Euclide mais bien différents de ceux qu'ils visaient lui-même³.

Le savoir scientifique (τὸ ἐπίστασθαί) au sens où l'entendaient Aristote et ses contemporains a pour prétention de saisir le réel et d'en dévoiler les articulations. Nos savants pêchaient par gourmandise, le réel fuyant sans cesse la pensée qu'ils en avaient.

Il a donc fallu se demander à nouveau ce qu'est une démonstration, d'où elle part et de quoi elle parle.

3. On renvoie ici à notre article *La réflexion chez le mathématicien*, <http://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article872>

2 Descartes : démontrer c'est enchaîner les raisons à partir d'intuitions premières.

Pour construire un savoir, Descartes ne part plus d'un objet qui est, face à lui. Il préfère partir d'intuitions certaines pour enchaîner les déductions. Ainsi, au chapitre III des *Règles pour la direction de l'esprit* :

”Voici le recensement de tous les actes de notre entendement qui nous permettent de parvenir à la connaissance des choses... Il n'y en a que deux à admettre, savoir l'intuition et la déduction. Par intuition, j'entends... le concept que l'intelligence pure et attentive forme avec tant de facilité et de distinction qu'il ne reste absolument aucun doute sur ce que nous comprenons... Nous distinguons l'intuition intellectuelle de la déduction certaine par le fait que, dans celle-ci, on conçoit une sorte de mouvement ou de succession, tandis que dans celle-là, il n'en est pas de même.”

On peut dès lors se dire qu'il y a bien là des savoirs mathématiques qui ne sont pas démontrés mais admis par une sorte de vision intellectuelle.

Pour démontrer, il faut donc poser des axiomes que l'on ne démontre pas mais dont on sait intellectuellement qu'ils sont *vrais*. Mais ces axiomes concernent des choses qui ne sont pas là face à moi dans l'expérience. Alors comment peuvent-ils être vrais ? Qu'est-ce donc que ce savoir mathématique qui n'est lui-même pas démontré ni démontrable ?

Descartes dit ainsi⁴ : il faut savoir que $2 + 2$ font 4 , que $3 + 1$ également. Cette évidence *intuitive* est explicitée par Kant dans ses *prolégomènes à toute métaphysique future*⁵ : il y a en nous des intuitions a priori qui nous permettent d'effectuer des synthèses entre des notions d'objets donnés : l'espace en est une. Quand je dis $2 + 2$, je me représente dans mon intuition d'espace deux points à côté de deux autres points. Au sein de mon intuition d'espace, je peux les réunir en un même lieu et alors obtenir 4 . Ce n'est pas une déduction mais un travail synthétique de mon intuition pure.

Reste que, encore une fois, le savoir excède ici sa capacité à déduire : ce sont des intuitions - celle de l'espace euclidien par exemple - qui informent les briques axiomatiques desquelles vont partir les déductions. A l'intérieur d'un savoir qui la fonde et la permet, la démonstration n'est donc ici que la fonction du savoir qui produit l'enchaînement de ses notions dont bon nombre lui sont données de facto par la structure même de l'intuition.

Les deux dernières approches ont restreint par étapes les lieux d'action de la démonstration.

Chacune a posé une borne face à la démonstration : la première le réel et la seconde une intuition féconde.

4. *ibid*

5. Introduction, §2, III, 2

C'est désormais le temps d'aller au bout de notre démarche et de penser la démonstration pour elle-même.

3 Suzanne Bachelard : la vie de la démonstration et ce qu'elle fait advenir.

La réflexion sur les axiomes et les démonstrations en tant que tels a été analysée d'un point de vue phénoménologique par Suzanne Bachelard dans la conclusion de son livre *La Conscience de la rationalité*. Nous présentons ci-dessous certaines de ses analyses avant de conclure.

Première remarque : la systématisation axiomatique des structures est un instrument de découverte car elle conduit à la considération de nouvelles structures obtenues par variations des axiomes⁶.

Par exemple, on peut se demander ce que serait un espace où le théorème de Pythagore ne serait pas vérifié - c'est le cas entre autre des espaces de Banach. Ou encore, on peut refuser l'axiome du tiers exclu et envisager une mathématique de type intuitionniste.

Deuxième remarque : il faut se méfier d'un mathématicien qui dirait qu'il sait qu'un théorème est vrai car il a su le démontrer bien qu'aujourd'hui il n'en soit plus capable : ce mathématicien ferait confiance à sa mémoire et pas à son jugement. Se souvenir en toute clarté d'un théorème c'est à la fois pouvoir l'énoncer et savoir le démontrer : la structure de l'intentionnalité rationnelle implique la compréhension potentielle⁷. Celui qui sait qu'il pourra, quand il le voudra, se remettre en tête le détail des preuves de la démonstration, a accès à l'authenticité de la rationalité discursive. Il faut distinguer le temps des choses et le temps de la conscience, temps des vérités qui est le pouvoir d'actualiser une démonstration le moment venu.

Troisième remarque : il faut tenir compte de l'originalité des formes du savoir rationnel, qui sont des totalités structurées dans lesquelles les liaisons sont thématiques comme dans l'examen d'une chaîne par ses anneaux. Le savoir rationnel se caractérise véritablement comme enchaînement, lui-même rationnel, de démonstrations : il est prolifération non bornée du rationnel. En son sein, l'emploi de théorèmes ou de définitions apporte des raccourcissements des démonstrations par condensation. Il introduit ainsi une différenciation dans la monotonie épistémologique des déductions. Et la condensation notionnelle est accrue par l'utilisation d'axiomes. Ces derniers permettant de présenter rapidement toute une situation mathématique⁸.

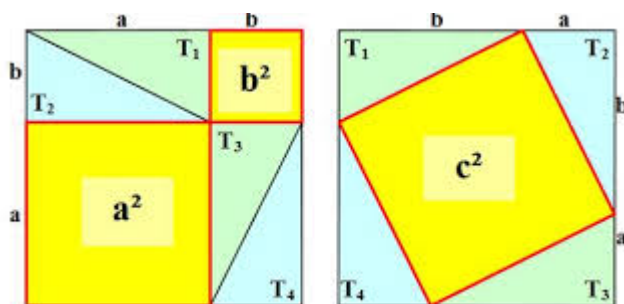
6. *La Conscience de la rationalité*, Conclusion I, §17

7. *loc.cit* II, §6 et 8

8. *loc.cit* II, §17 à 20

Pensée pour elle-même, la démonstration a donc sa propre vie et son propre intérêt épistémologique. Elle suscite sans cesse de nouveaux questionnements et de nouvelles découvertes et devient à elle-même son propre objet en raison de sa plasticité. Les théorèmes ne sont plus des conclusions de syllogismes ou des terminus de chaînes déductives : ils sont des condensations particulières du mouvement du savoir qui fait comme une pose pour observer un de ses propres moments - moment qui pourrait de nouveau être éclaté pour bifurquer vers d'autres voies logiques par changement d'axiomes ou de règles déductives.

Par exemple, je peux considérer les deux figures ci-dessous :



Dans ces deux figures, les quatre triangles T_1, T_2, T_3 et T_4 ont mêmes angles et mêmes longueurs de côtés a, b et c . Il est alors possible de justifier que chacun des trois quadrilatères jaunes est un carré. On obtient alors l'égalité $a^2 + b^2 = c^2$. Cette dernière information peut par exemple être ensuite utilisée pour obtenir des relations entre les longueurs des diagonales d'un parallélogramme et les longueurs de ses côtés ; nouvelle identité pouvant derechef être réinvestie pour en découvrir d'autres etc.

Mais on peut aussi choisir de faire une pause une fois l'identité $a^2 + b^2 = c^2$ obtenue afin de prendre le temps de la considérer pour elle-même. On lui donne alors un nom (théorème de Pythagore), on s'intéresse à ce qu'elle permet d'obtenir dans des cas concrets (tous les exercices classiques sur les triangles rectangles du collège par exemple) etc.

Une autre voie possible peut encore être de regarder avec soin les étapes que nous avons parcourues pour obtenir le théorème de Pythagore. Remarquer par exemple que pour savoir que les triangles T_1, T_2, T_3 et T_4 dans la figure de droite ont chacun une hypoténuse qui a pour longueur c , on a du présupposer un axiome dit *de congruence* qui spécifie que si deux triangles ont deux à deux un angle de même mesure compris entre deux côtés de mêmes longueurs alors leurs trois côtés ont deux à deux même longueur. Envisager alors une géométrie dans laquelle cet axiome n'est pas vérifié⁹ et y suivre la bifurcation qu'aurait alors suivie à ce stade notre démonstration etc.

9. cf. David Hilbert, Les fondements de la géométrie, Dunod (1971), rééd Gabay (1997), annexe II.

La quatrième et dernière remarque concerne la physique mathématique : le physicien mathématicien raisonne à partir d'équations. En faisant cela, il met entre parenthèses le cheminement rationnel-réaliste duquel elles sont issues. La physique mathématique ne cesse de constituer des tentatives de déduction a priori de nouveaux départs de l'explicitation¹⁰. Il s'agit d'une mise entre parenthèses d'un savoir antérieur afin de tenter d'en rendre compte de façon déductive, i.e. de le faire naître à l'existence mathématique¹¹.

C'est par exemple le cas du travail de Newton qui, à l'aide de l'intuition de forces centrales pose les équations du mouvement pour ne penser ensuite le réel qu'à travers ces dernières.

Plus techniquement, on peut encore citer la définition mathématique d'un fluide incompressible pour un mathématicien comme étant la donnée des divers équations de Navier-Stokes : penser le mouvement du fluide se réduit alors à travailler les équations pour elles-mêmes.

Conclusion.

Ainsi, la démonstration, bien qu'originellement issue d'un questionnement sur le réel ou sur une certaine intuition de celui-ci, a su s'en séparer et prendre son autonomie.

Constituée en tant que méthode de recherche capable de s'interroger elle-même de façon inépuisable par mise en question de ses propres choix et thèmes, elle n'en oublie cependant pas ses origines. La physique mathématique par exemple n'aura de cesse de tenter de refonder ses intuitions du réel comme savoir rationnelle, i.e. de le soumettre à son propre empire.

Il y a dès lors constitution d'un nouveau type de savoir : celui des mondes possibles explorables suite aux divers calibrages des éléments démonstratifs. Ce savoir se suffit à lui-même et plus étrange encore, il nous parle du réel - mais cela est une autre histoire.

C'est précisément en ce sens mais seulement en ce sens que l'on peut dès lors affirmer avec force qu'il faut démontrer pour savoir.

10. *loc.cit* I, §25

11. *loc.cit* II, §29