Intervention en Prépa Agreg philosophie : la réflexion chez le mathématicien.

Olivier MUZEREAU

4 février 2016

Introduction.

Comme c'est l'usage en agrégation externe de philosophie, le thème proposé en deuxième composition des écrits frappe par son laconisme : *la réflexion.*
Citons Hegel sur ce sujet.

La substance vivante est, en tant que sujet, la scission en deux de ce qui est simple [puis] la négation de cette opposition. Seule cette égalité restaurée, qui est ***réflexion en soi-même dans l'autre****, est le vrai.* [1, p. 69]

Le processus logique de *réflexion en soi-même dans l'autre*, comme beaucoup d'autres moments de l'Idée spirituelle de Hegel, se diffracte dans les divers couches du rapport de l'esprit au monde.
Il nous a paru significatif dans le cas du rapport du mathématicien, tant à ses propres concepts, qu'aux réalités et idéalités que ceux-ci désignent.
En effet, le mathématicien pense les mathématiques et parfois, il en vient même à tenter de penser mathématiquement ce qui ne semble pas l'être - *la nature est un livre écrit en langage mathématique* disait Galilée.
Il se tient donc initialement comme en opposition face à ses pensées et face à ces pensées.
Comment nie-t-il cette opposition ? Comment procède-t-il pour restaurer une égalité entre cette pensée et sa pensée ?
Nous apporterons quelques éclaircissements à ces questions décisives en interrogeant le concept d'axiome et le sens qu'il peut avoir pour le mathématicien qui l'invoque. Nous questionneront ensuite la nature même des entités mathématiques ainsi que leur rapport au réel.
Pour ce faire, nous exhiberons des réflexions et des exemples piochés chez deux auteurs de parcours différents.
Gilles Dowek est un auteur contemporain qui est actuellement chercheur à l'INRIA [1]. Il a publié en 2015 *la logique*, recueil dans lequel il présente succinctement l'évolution de cette discipline de Aristote à nos jours.
Suzanne Bachelard fut une philosophe des sciences du siècle dernier. Elle enseigna entre autre à la Sorbonne et à l'ENS des jeunes filles. Elle a publié en 1958 *la conscience de la rationalité*, recueil dans lequel elle travaille au corps divers objets mathématiques, et montre comment les apparitions de concepts nouveaux éclairent des concepts anciens et enrichit leurs sens.

1. Institut national de recherche en informatique et en automatique.

1 Pourquoi les axiomes ?

1.1 Des syllogismes déficients.

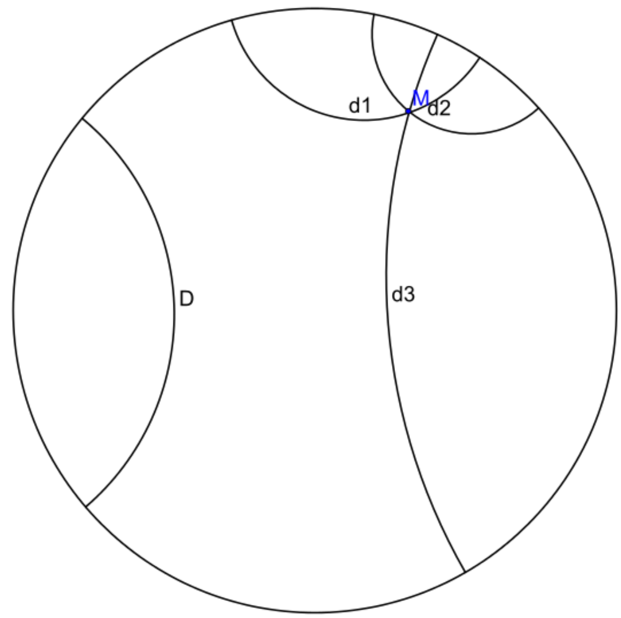
Les syllogismes pris pour eux-mêmes s'avèrent insuffisants à produire du vrai à partir du vrai. Sans précision ou restriction quant aux objets auxquels ils s'appliquent, ils prêtent rapidement le flanc aux homonymies. Ainsi, la proposition ≪ les A sont B et les B sont C donc les A sont C ≫ permet de déduire des prémisses Maryline est une étoile et les étoiles sont faites de gaze le fait que Maryline est faite de gaze.
C'est pour pallier cette carence qu'ont été introduits en logique les axiomes [2, p. 13], sortes de briques de base à partir desquelles est élaboré l'édifice du vrai, c'est à dire du sens. Ce sont les axiomes qui déterminent la signification des termes exploités par une théorie en en clarifiant les concepts. Sans eux, pas de sens ou risque de polysémie. Les règles de déduction quant à elles, règlent les significations des connecteurs logiques.

1.2 Une ambiguïté en géométrie.

Prenons l'exemple de la possibilité des géométries non euclidiennes.
Disciple d'Aristote, Euclide fonde sa géométrie en y observant les préceptes logiques établis par son maître. Euclide travaille avec des objets particuliers : les points, les droites, les figures etc. Il lui faut donc les cerner au plus près à l'aide d'axiomes.
Concernant la droite, Euclide donne une définition et deux axiomes.
Définition : une ligne droite est également placée entre ses points [2].
Axiome 1 : il est toujours possible de tracer une droite passant par deux points donnés.
Axiome 5 : par un point extérieur à une droite, ne passe qu'une seule parallèle [3] à la première droite [4].
Il est clair que l'intuition classique que nous avons des droites vérifie bien ces trois derniers points.
Comme on sait, les géomètres ont longtemps cherché à obtenir l'axiome 5 à l'aide d'autres axiomes plus simples proposés par Euclide sans y parvenir. L'indépendance de celui-ci par rapport à ceux-là est aujourd'hui établie [2, p. 72-75] et illustrée par les géométries non euclidienne. La géométrie de Lobachevsky par exemple, permet d'envisager une infinité de parallèles à la droite donnée passant par le point.

2. Un ligne est une longueur sans largeur.
3. Les parallèles sont des droites qui, étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté, ni de l'autre.
4. On donne ici une version équivalente à l'axiome des parallèles.

On donne ci-contre une représentation de cette géométrie.
Les « droites » y sont des arcs de cercles intérieurs à un cercle donné et perpendiculaires à celui-ci.
Il est tout à fait possible ici d'utiliser le terme « droite » puisque ces arcs de cercle vérifient la définition d'Euclide ainsi que le premier axiome.
On voit bien sur l'exemple que par M, extérieur à (D), "passent" (d1), (d2) et (d3), toutes trois "parallèles" à (D).
Il est clair que la possibilité d'appeler « droites » de tels arcs de cercles réside dans l'ambiguïté de la définition qu'Euclide donne des droites. Dans les géométries non euclidiennes, le terme droite ne renvoie plus à l'intuition courante mais reste cohérent avec la définition d'Euclide.



1.3 De la possibilité d'envisager un infiniment petit en acte moyennant en choix particulier d'axiomes.

Le choix des axiomes est assez libre en mathématiques.
On demande cependant à ce qu'il ne contredise pas d'emblée ce qui peut être vérifié immédiatement par le calcul [2, p. 55]. Ainsi, un axiome du type 1+1=3 ne peut être admis si on veut faire de l'arithmétique.
On demande aussi que ces axiomes permettent d'obtenir comme vrai tout ce qui peut être vérifié par le calcul, voire des formules générales donc chaque cas particulier peut être vérifié par le calcul.
Certains choix d'axiomes permettent ainsi d'édifier des théories efficaces mais exotiques.

Prenons un exemple : le cas des infiniment petits [2, p. 79- 80].
Il semble contre intuitif d'envisager des éléments qui soient des infiniment petits en acte.
Pourtant, à l'aide d'un cadre axiomatique bien choisi, les mathématiques ouvrent la voie à leur utilisation. Il s'agit de l'analyse non standard de A. Robinson.
Robinson ajoute à la théorie des nombres un symbole $e > 0$ vérifiant une infinité d'axiomes : $e \leq 1, e \leq \frac{1}{2}, e \leq \frac{1}{3}$ etc.
Il appelle e un infiniment petit et l'utilise comme tel dans ses démonstrations.
On pourrait opiner qu'une telle définition est contradictoire car e devrait valoir 0 à la limite.
Cependant, le cadre axiomatique posé par Robinson ne permet pas de prouver cette opinion.

En effet, dans sa construction des nombres, Robinson n'utilise pas l'axiome d'Archimède [5] affirmant que pour x et y deux nombres positifs donnés vérifiant $x < y$, on peut toujours trouver un entier n pour lequel $n \times x > y$.
On ne peut donc pas utiliser des arguments du type

$$"e < 1, \text{ soit } n \text{ tel que } n \times e > 1. \text{ Alors } e > \frac{1}{n} : \text{contradiction}"$$

pour affirmer que sa théorie est contradictoire.
Par ailleurs, si on pouvait démontrer que la théorie de Robinson est contradictoire, alors, notre démonstration étant finie, elle n'utiliserait qu'un nombre fini d'axiomes $e \leq 1, e \leq \frac{1}{2} ..., e \leq \frac{1}{n}$.
En prenant $e = \frac{1}{n}$, on pourrait calquer la démonstration dans l'arithmétique classique qui serait donc elle aussi contradictoire. L'astuce de Robinson est de ne pas avoir choisi un axiome unique du type $\forall n, e \leq \frac{1}{n}$ qui aurait ipso facto rendu sa théorie contradictoire.

1.4 Portée téléologique des axiomes.

Ce dernier exemple illustre une certaine habitude des mathématiciens qui consiste à poser des axiomes dans le but de les utiliser de telle ou telle façon bien précise lors de démonstrations à venir qu'ils ont en tête.
Cette attitude a été soulignée par Suzanne Bachelard : on démontre ce qu'on veut démontrer et les origines [6] axiomatiques sont *en vue de*.
Il est donc bien utile à qui découvre les axiomes d'une théorie, de s'interroger sur la téléologie de chacun d'eux [3, Intro. § 6]. Pris pour eux-mêmes, les axiomes ont un goût de nouveauté car le simple y devient objet d'attention. Ils restent cependant trop souvent stériles [3, Intro. § 9]. Les visées du mathématicien restant voilées dans les origines qu'il pose à sa théorie, les axiomes sont insuffisants à saisir la nature de celle-ci [3, Intro. § 7]. Il faut donc en passer par l'expérience du rationnel de la théorie pour en goûter l'imprévisible latent dans ses fondements. C'est au fil des démonstrations que l'on saisira la nécessité des axiomes, voire qu'on envisagera ce qui serait si ceux-ci étaient niés [3, Intro. § 8].

1.5 Des axiomes pour la réalité.

Arrêtons nous désormais sur les axiomes utilisés par une branche particulière des mathématiques : *la physique mathématique*. Son but est tout bonnement la reconstruction mathématique du réel. Elle à l'originalité de s'essayer à des mutations d'inférences d'ordre physique en déductions mathématiques. Elle réalise des conversions d' a posteriori en a priori tout en gardant un pouvoir d'affirmation touchant le réel [3, Intro. § 21]. Elle ne doit pas être envisagée comme une expression de la physique en langage mathématique car ses schémas d'axiomes lui permettent de se constituer comme l'expression de sa propre pensée.

5. Axiome communément admis dans les constructions classiques des nombres.
6. Le terme origine tient ici du rapport de conditionnant à conditionné et n'a pas le sens chronologique classique. Il a donc une valeur explicative et déterminante [3, Intro. § 13].

Les axiomes de la physique mathématique sont des équations aux dérivées partielles.
Elles sont des abstractions amplifiantes qui permettent de penser davantage après leur élaboration qu'avant. Si les variables présentent dans ces équations renvoient le physicien à des significations d'éléments connus (vitesse, densité, pression etc), ces significations sont mises entre parenthèses par le mathématicien qui n'envisage les équations que du point de vue de leur capacité à produire des inégalités, de la compacité etc. Toutes sortes de données mathématiques permettant de cerner les potentielles solutions de ces équations tant du point de vue de l'existence que de l'unicité ou de la régularité.
Pour le mathématicien, il s'agit bel et bien d'axiomes *en vue de*. Pour le physicien par contre, ils renvoient à une réalité qui atteste de leur évidence.

1.6 Éther et groupes de transformations.

Cette mise entre parenthèses par les mathématiciens des propriétés concrètes des objets mathématiques a permis de dégager des structures mathématiques ainsi que la dépendance de celles-ci aux axiomes.
En effet, souvent, la cohérence rationnelle d'une théorie est masquée par les obligations réalistiques auxquelles l'esprit se soumet.
Boussineq par exemple [3, II. V], s'est évertué à imaginer l'éther et y a réuni des propriétés contradictoires : l'éther est à la fois un fluide de densité presque nulle et un solide indéformable.
Einstein quant à lui, prenant au sérieux Herz pour qui "les équations de Maxwell, ce sont les équations de Maxwell", a repensé la mécanique comme invariante par le groupe de Lorentz. Il a révélé par là même que l'éther n'était qu'un phantasme de l'imagination résultant de la tentative de penser réalistiquement l'invariance de équations de Maxwell par le groupe des transformations de Gallilée.
Einstein a pris l'élément mathématique [7] comme thème primaire ayant un intérêt en lui même. Ce qui pour certains n'était que moyen est devenu méthode, index d'une communauté de structures qu'il manifeste.

7. Le groupe des transformations de Lorentz.

2 Ontologie des mathématiques et avec les mathématiques.

2.1 Un querelle sur l'éternité.

Il est inévitable que le mathématicien réfléchissant sur l'objet mathématique ne s'interroge sur la nature de celui-ci.
Les homonymies, on l'a vu, ont été à l'origine de l'élaboration d'axiomes pour cerner au mieux le langage. Certaines de ces tentatives ont parfois échoué. Ainsi, il est clair qu'Euclide n'aurait pas vu des droites dans les arcs de cercles de Lobachevsky.
On peut dés lors émettre au moins deux hypothèses concernant les homonymies [2, p. 13] :
- soit les mots sont des vecteurs imparfaits visant des concepts qui eux sont clairs et analysables par la philosophie,
-soit certains concepts sont intrinsèquement flous et ne sont donc pas accessibles à la logique.

Cette distinction a ouvert la voie à deux écoles métaphysiques en mathématiques. Selon les platoniciens réalistes, toute assertion est soit vraie, soit fausse, qu'on puisse la démontrer ou pas. Le théorème de Gödel montre notre incapacité à accéder constructivement à cette vérité.
Selon les anti-platoniciens intuitionnistes, la vérité n'est que le démontrable. On crée le vrai en le prouvant. Avant cela, il n'est ni vrai, ni faux.

2.2 De l' a-rationalité d'un nombre.

Empruntons à G. Dowek [2, p. 82- 83] un exemple illustrant cette querelle.
Soit à prouver que $\exists x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, x^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$.
Un mathématicien platonicien pourrait raisonner de la façon suivante :
Considérons le nombre $y = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.
Deux cas se présentent :
- soit $y \in \mathbb{Q}$ et dans ce cas, $x = \sqrt{2}$ convient puisqu'il est irrationnel,
- soit $y \notin \mathbb{Q}$ et dans ce cas, $x = y$ convient puisque $x^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = 2 \in \mathbb{Q}$.
Donc le nombre cherché existe.
Le biais de le démonstration pour un anti-platonicien consiste à affirmer que soit $y \in \mathbb{Q}$ soit $y \notin \mathbb{Q}$. Le nombre $y = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est pour lui intrinsèquement flou a priori et est peut-être inaccessible à la logique.

2.3 Le platonisme nuancé de Suzanne Bachelard.

Suzanne Bachelard, étudiant la physique mathématique, propose une autre voie métaphysique pour envisager la nature des objets mathématiques. Il s'agit d'une sorte de platonisme évolutif. Elle remarque que les formations logiques sont transcendantes par rapport aux activités psychiques dans lesquelles elles

se forment. Ce ne sont pas des constructions psychiques éphémères comme le sont tous les actes de pensée. Elles ont une existence omni-temporelle et supra-temporelle : on peut-toujours-à-nouveau revenir à elles comme on revient à un objet réel dont la permanence transcende les multiples consciences, éphémères par essence. Cependant, ces formations ne sont pas des objets spatiaux, elles sont comme en suspens entre objectivité et subjectivité [3, P3. II § 22].
Contrairement aux idées de Platon, il faut souligner que de nouvelles expériences de pensée peuvent venir enrichir le sens d'un concept physico-mathématique [3, P3. II § 23]. Un pouvoir originel de réorganisation, d'élargissement et de complexification des structures rationnelles face aux différents objets proposés à la rationalité est toujours actif dans le développement de la science rationnelle [3, Intro. § 5].

Dans cette perspective, l'intentionnalité du physicien mathématicien, c'est de faire exister mathématiquement les faits empiriques à partir des équations pour pouvoir les comprendre autrement, voire mieux. C'est cette perspective qu'illustrent nos quatre derniers paragraphes.

2.4 Incompressibilité mathématique.

La mathématification de l'objet *milieu continu* permet par exemple d'établir des propriétés des fluides incompressibles.
Les intuitions naturelles sur le continu sont pauvres et non actualisables.
Les intuitions philosophiques s'épuisent en une polémique contre des intuitions atomistiques qui ne prendraient pas en compte le continu comme liant des choses.
Mathématiquement, l'équation $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ caractérise les milieux incompressibles [8]. Cette caractérisation diffère notablement des intuitions communes d'incompressibilité difficilement imaginables dans des régions inaccessibles à l'expérience. Elle est intrinsèque à la matière que pense le physicien mathématicien. Elle permet entre autre de démontrer que dans un plan ou sur un cylindre, le champ de vitesse a un axe de rotation lié au courant, ou encore que le débit volumique dans une conduite de section variable est constant : dans un rétrécissement, la vitesse augmente, dans un élargissement, elle diminue.

2.5 Le potentiel newtonien.

Le potentiel newtonien permet d'envisager la réalité en termes d'acte et de puissance.
Dans la phénoménologie de l'esprit, Hegel dépasse dialectiquement le concept de force dans celui de conscience de soi [1, p. 188- 189].
La notion de potentiel propose une autre dialectique.
Elle a d'abord joué un rôle d'intermédiaire de calcul pour s'autonomiser et

8. (u, v, w) étant les composantes dans un repère rectangulaire de la vitesse d'un élément fluide.

acquérir une réalité due à son pouvoir d'application. La notion de potentiel vise l'idée d'un champ physique ayant une dynamique d'ensemble, pas le comportement dynamique d'un objet particulier.
Si plusieurs points-masses fixes $m_1, m_2, m_3, ...$ attirent un point-masse mobile μ, la résultante des forces s'exerçant sur μ est la somme vectorielle des forces $F_1 = \frac{-G\mu m_1}{r_1^2}, F_2 = \frac{-G\mu m_2}{r_2^2}..., F_n = \frac{-G\mu m_n}{r_n^2}$, ce qui fournit le travail $\frac{-G\mu m_1}{r_1^2}\mathrm{d}r_1 - \frac{G\mu m_2}{r_2^2}\mathrm{d}r_2... - \frac{G\mu m_n}{r_n^2}\mathrm{d}r_n$.
Cette dernière expression invite le mathématicien à en considérer une autre : le potentiel des forces $G\mu(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}... + \frac{m_n}{r_n})$.
L'ontologie de la notion de potentiel engage le philosophe dans une dialectique explicative permanente [3, 4 III]. En raison de la connaissance sensible que nous avons de notre propre force, on a dans un premier temps tendance à concéder la réalité à la résultante force. Cependant, envisager un soleil sans planètes tend à concéder la réalité à une attraction en puissance.
Le potentiel est un élément abstrait-concret : un philosophe qui envisage le concept de potentiel dans quelques-uns de ses champs d'application est toujours prêt à discuter sur son caractère formel et son caractère réel, et à s'interroger sur la nature du déplacement de réalisme passant de la notion de champ de force à celle de champ de potentiel.
La possibilité de passer de la force résultante au potentiel est possibilité de déplacement de vision réalistique. Le potentiel semble être une idée complexe condensée en entité mathématique.

2.6 Prédictions mathématiques au delà de l'intuition.

Envisageons un problème où les mathématiques ont permis de mieux cerner la réalité : quelle forme prendra une boule de fluide entrainée autour de son axe à une vitesse angulaire ω constante quand ses actions intermoléculaires obéissent à l'attraction newtonnienne ?
Les intuitions à ce sujet sont divergentes mais restreintes à des images de sphéroïdes de révolution aplatis ou allongés aux extrémités de l'axe de rotation.
Le théorème de Jacobi [3, 7 VIII] élargit le champ de l'intuition : pour certaines valeurs de la vitesse de rotation, la forme obtenue peut être celle d'un ellipsoïde ayant trois axes inégaux ; dans tous les cas, les ellipsoïdes et sphéroïdes ne se forment que si c'est le plus petit axe qui est axe de rotation.
Introduisant une segmentation des niveaux temporels [9], Poincaré poursuit l'étude précédente.
Sa théorie démontre la possibilité d'évolutions originales vers des formes en poire. Ainsi, l'intuition première de sphéroïde aplati n'était qu'une fixation en pensée de ce qui n'est qu'un stade dans un processus complexe d'objectivation impensable sans l'aide des mathématiques.

9. Il introduit dans les équations un paramètre de temps séculaire différent du temps t à action immédiate.

2.7 Une analogie équationnelle.

En dernier exemple, remarquons que la théorie du potentiel [3, 4 V] permet la transposition mathématique [10] de la théorie de l'attraction gravitationnelle dans la théorie de la chaleur et inversement.
Par exemple, de la proposition " si la température est maintenue la même en tous les points de la surface d'un corps alors elle finira par être la même en tous ses points intérieurs", on tire : "si des masses situées à l'extérieur d'une surface établissent sur celle-ci un potentiel constant alors leur potentiel sera le même en tous les points intérieurs à la surface [11]".
C'est ici le caractère polyvalent des équations mathématiques (les mêmes dans les deux configurations physiques) qui renforce l'emprise de l'abstrait sur le concret en donnant une consistance à l'abstrait lui-même.
Des équations identiques permettent encore d'affirmer que les couches de matière attirées sur une surface jouent le même rôle que des sources de chaleur en contact avec la surface. Cela fait sens mathématiquement mais est ontologiquement difficilement envisageable en raison des différence de nature entre la matière qui se maintient dans l'être et la chaleur qui s'y disperse.

10. Au sens d'un transfert d'évidences car toutes deux sont régies par les mêmes équations.
11. En retour, on se rappellera, par delà une première intuition naïve, que la surface d'un corps est une discontinuité de milieu qui ne se laisse pas si intuitivement saisir.

Conclusion.

Les axiomes semblent avoir été dans un premier temps des essais pour dire de façon univoque des intuitions d'objets géométriques.
Cette tentative, on l'a vu, c'est révélée faillible : les objets mathématiques, comme les choses, semblent résister au langage. C'est ce que souligne d'ailleurs Hegel à la fin de son chapitre sur la certitude sensible :

Si l'on veut dire ce morceau de papier que l'on vise, c'est là quelque chose d'impossible, parce que le ceci sensible qui est visé est inaccessible au langage... Au beau milieu de la tentative effective de le dire, il se désintégrerait ; ceux qui auraient commencé sa description ne pourraient pas l'achever, mais devraient nécessairement l'abandonner à d'autres, qui avoueraient eux mêmes en fin de compte qu'ils parlent d'une chose [singulière] qui n'est pas [rationnelle].[1, p. 142]

L'axiome, s'il veut signifier le singulier, semble à jamais devoir rester entaché d'une ambiguïté quand à sa visée de celui-ci.
Cette première remarque parait barrer la route à la tentative du mathématicien d'unifier sa pensée à son objet.
De là à proposer des axiomes visant une intuition floue ou une pensée non stable, il n'y a qu'un pas. C'est, nous l'avons vu, le parti pris de H. Robinson lorsqu'il caractérise les infiniment petits.

Reste au moins une autre voie ; plutôt que de viser la singularité du réel mouvant, pourquoi ne pas se contenter d'équations censées en être tirées ?
On a vu que le physicien mathématicien part justement de tels axiomes. Ces derniers ne sont alors plus envisagés en fonction de leurs significations originelles, mais en vue de leur capacité à produire mathématiquement des solutions aux problèmes d'origine réelle.
Il y a ainsi constitution d'*un monde mathématique* pensé pour lui-même. C'est là, nous semble-t-il que se situe une des tentatives les plus pertinentes pour restaurer une unité entre la réalité et la pensée du mathématicien - problématique que nous annoncions en introduction.
Dans ce *monde*, les concepts sont affinés et passés au creuset de la réflexion des mathématiciens. Ces concepts disent quelque-chose du réel parfois bien au-delà des intuitions communes voire éclairées, et donnent à penser aux philosophes. Ils jouent alors un rôle comparable à celui joué par les Idées platoniciennes car ils permettent de saisir des structures qui nous parlent du réel et nous en révèlent des propriétés cachées. Leur nature diffère cependant de celle des Idées de Platon car leur sens et leur portée sont souvent modifiés, enrichis et renouvelés par les progrès de la recherche mathématique.
Autant le réel semble toujours devoir échapper au concept, autant le concept mathématique saura régulièrement se renouveler en son sens pour nous en apprendre toujours plus sur le réel.

Références

[1] G.W.F. Hegel, *La phénoménologie de l'esprit.*, Vrin, Trad. B. Bourgeois, 2006.

[2] G. Dowek, *La logique.*, Le Pommier, 2015.

[3] S. Bachelard, *La conscience de la rationalité.*, PUF, 1958.