Les polynômes de LAGRANGE
et leurs secrets

André Seguin

Ce texte est la suite de l'article - Deux défis de Pierre Fermat[1]- dans lequel l'outil "le développement en fractions continues d'un irrationnel" nous a permis avec l'aide du logiciel Xcas de mettre en évidence des solutions de l'équation $x^2-\alpha y^2=1$. Nous avons alors conjecturé l'existence d'une solution non triviale pour toute valeur de α. Cette conjecture a été transformée en théorème au XVIII^e siècle par les travaux de Joseph Lagrange sur le développement en fractions continues, travaux qui portent sur l'ensemble des nombres irrationnels quadratiques.
Afin de rester proche de l'équation proposée par Fermat, nous nous limitons aux irrationnels de la forme √(α), lorsque α est un nombre entier naturel non carré. Notre objectif est de montrer comment les polynômes de Lagrange vont nous permettre dans ce cas particulier de redécouvrir les deux résultats importants suivants :

- L'équation de Fermat pour α entier naturel non carré admet toujours une solution non triviale.
- Le développement en fractions continues de√(α) est ultimement périodique.

Une observation de ces polynômes sur des exemples va nous permettre de découvrir une relation entre développement en fractions continues et division euclidienne.

Sommaire

Nous reprenons en l'étoffant, le passage sur les fractions continues de l'article mentionné plus haut.

Fractions continues

Le principe repose sur un algorithme : soit s un nombre irrationnel plus grand que 1. Écrivons-le sous la forme $E+v$ avec E sa partie entière et v un nombre irrationnel entre 0 et 1. En posant $w=\frac{1}{v}$,on a l'égalité $s=E+\frac{1}{w}$ dans laquelle w est un irrationnel plus grand que 1.
Le nombre s donne naissance à deux nombres E et w , E un entier naturel et w un irrationnel plus grand que 1 donc de même nature que s . Nous pouvons alors recommencer, w prenant la place de s , et obtenir de nouvelles valeurs E' et w' , ainsi qu'une nouvelle égalité $w=E'+\frac{1}{w'}$ et ainsi de suite. $s=E_1+\frac{1}{w_1}$; $w_1=E_2+\frac{1}{w_2}$; $w_2=E_3+\frac{1}{w_3}$; ... ; $w_{j-1}=E_j+\frac{1}{w_j}$; ...

1 Irem de la Réunion

Nous créons ainsi, à partir du nombre irrationnel s, deux suites infinies :

- Une suite d'entiers naturels : $E_1, \ E_2, \ ....E_i, ...$ suite des parties entières.
- Une suite de nombres irrationnels plus grands que 1 : $w_1, \ w_2, \ ....w_i, ...$ suite des quotients complets.

On appelle développement de s en fractions continues[2] la suite $[E_1, \ E_2, \ ....E_i, ...]$ .Les termes E_i sont les coefficients du développement.
À chaque étape r il existe un algorithme "retour" qui, à partir de l'égalité correspondante, revient au nombre irrationnel en faisant les calculs à l'envers.

L'idée est d'utiliser cet algorithme "retour" en négligeant dans la dernière égalité considérée $w=E'+\frac{1}{w'}$ le terme irrationnel $\frac{1}{w'}$. Ce qui revient dans cette égalité, à remplacer le quotient complet w par sa partie entière E' . On quitte alors le domaine des irrationnels et l'algorithme retourne un rationnel écrit sous forme de fraction irréductible.
La fraction irréductible qui représente ce rationnel s'appelle réduite de s *au rang* r .

Notations : la partie entière au rang j sera notée E_j et la réduite de rang j $\frac{k_j}{h_j}$.

Le tableau suivant montre le calcul de la réduite de rang r $t_r=\frac{k_r}{h_r}$ pour le nombre s,

	$s=E_1+\frac{1}{w_1}$		$t_r=E_1+\frac{1}{t_{r-1}}$	
Aller	$w_1=E_2+\frac{1}{w_2}$		$t_{r-1}=E_2+\frac{1}{t_{r-2}}$	
	$w_2=...$		$t_{r-2}=E_3+\frac{1}{t_{r-3}}$	
	$w_{r-2}=E_{r-1}+\frac{1}{w_{r-1}}$		$t_2=E_{r-1}+\frac{1}{t_1}$	Retour
	$w_{r-1}=E_r+\frac{1}{w_r}$		$t_1=E_r$	

Au rang un, l'équation est $s=E_1+\frac{1}{w_1}$, on néglige $\frac{1}{w_1}$ et on obtient $t_1=\frac{k_1}{h_1}=\frac{E_1}{1}$

Au rang deux
$\frac{k_2}{h_2}=E_1+\frac{1}{E_2}=\frac{E_2*E_1+1}{E_2}$, $\frac{k_2}{h_2}$ est clairement irréductible; etc.

2 Dans ce texte nous nous limitons à des nombres irrationnels plus grand que 1.

Le programme suivant donne pour un entier naturel α non carré la réduite de rang r de l'irrationnel √(α), il utilise la fonction partie entière du logiciel Xcas. La variable n remplace α dans le programme.

```
réduite( n , r ):={
  local j,k ,f, t , v , w , z , c,L ;
    c:= 0 ; j:=sqrt(n) ;L:=NULL;
  while( c < r ){
t := floor(j); v:= j-t ; w := normal(1 /v); L := L, t ; j := w ; c := c+1;}

k:=r-1; z:=L[k];f:=z; while(k>0){ f:= normal(L[k-1]+1/z) ; z:=f; k:=k-1}
```

Exemple : pour le nombre 7, la réduite de rang 4 de √7 est : réduite(7,4)= $\frac{8}{3}=\frac{k_4}{h_4}$.

Une première propriété des réduites

$$\text{Pour tout} \quad j\geq 1 \qquad \frac{k_{2j-1}}{h_{2j-1}}<s<\frac{k_{2j}}{h_{2j}} \quad .$$

Montrons que pour tout $j\geq 1$ $s<\frac{k_{2j}}{h_{2j}}$.

Dans le tableau au rang $r=2j$ les égalités sont $w_{2j-1}=E_{2j}+\frac{1}{w_{2j}}$ et $t_1=E_{2j}$ on a donc $w_{2j-1}>t_1$, les nombres étant positifs on en déduit $\frac{1}{w_{2j-1}}<\frac{1}{t_1}$ puis $E_{2j-1}+\frac{1}{w_{2j-1}}<E_{2j-1}+\frac{1}{t_1}$ c-à-d $w_{2j-2}<t_2$; on poursuit de façon analogue $\frac{1}{t_2}<\frac{1}{w_{2j-2}}$ donc $E_{2j-2}+\frac{1}{t_2}<w_{2j-3}$ c-à-d $w_{2j-3}>t_3$; on peut remonter ainsi jusqu'à $w_1>t_{r-1}$ ($r=2j$) et en déduire $E_1+\frac{1}{w_1}<E_1+\frac{1}{t_{r-1}}$ c-à-d $s<t_r$ soit $s<\frac{k_{2j}}{h_{2j}}$.

Nous laissons le lecteur montrer pour les indices impairs que $\frac{k_{2j+1}}{h_{2j+1}}<s$.

Nous en déduisons un résultat qui sera utilisé par la suite :

- Soit $s=\sqrt{(\alpha)}$ et $\frac{k_j}{h_j}$ et $\frac{k_{j+1}}{h_{j+1}}$ deux réduites consécutives, les quantités $k_j^2-\alpha h_j^2$ et $k_{j+1}^2-\alpha h_{j+1}^2$ sont de signes contraires.

Par exemple, si j est impair de $\frac{k_j}{h_j}<\sqrt{(\alpha)}$ et $\sqrt{(\alpha)}<\frac{k_{j+1}}{h_{j+1}}$ on déduit $k_j^2-\alpha h_j^2<0$ et $0<k_{j+1}^2-\alpha h_{j+1}^2$, l'autre cas se traite de la même façon.

Réduite fonctionnelle

Dans le tableau précédent qui décrit l'algorithme retour, nous sommes partis de $t_1=E_r$ pour aboutir à $t_r=\dfrac{k_r}{h_r}$, substituons un réel positif x à E_r et partons de $t_1=x$. Il suffit dans le programme précédent d'écrire $z:=x$ à la place de $z:=L[k]$. Par exemple pour s= √(3) et r = 5 on trouve $t_5=\dfrac{7x+5}{4x+3}$. Le résultat peut alors être vu comme une fonction qu'on appelle f-réduite qui à x associe $f_r(x)=t_r$.

Deux images particulières
Soit α un entier naturel non carré

* Pour $x=E_r$ l'image de x est $f_r(E_r)$ qui est par définition la réduite de rang r de $\sqrt{(\alpha)}$, on a $f_r(E_r)=\dfrac{k_r}{h_r}$.

** Pour $x=w_{r-1}$ on ne néglige rien, on prend le quotient complet, l'image est $f_r(w_{r-1})=\sqrt{(\alpha)}$.

Une formule de récurrence

Comme on peut le voir en comparant la liste donnant les réduites de √(3) pour les rangs de 1 à 10 à celle de ces nouveaux objets

réduite(3,j)$(j=1..10)

$$\left(1,\ 2,\ \frac{5}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{19}{11},\ \frac{26}{15},\ \frac{71}{41},\ \frac{97}{56},\ \frac{265}{153},\ \frac{362}{209}\right)$$

fréduite(3,j)$(j=1..10)

$$\left(x,\ \frac{x+1}{x},\ \frac{2\cdot x+1}{x+1},\ \frac{5\cdot x+2}{3\cdot x+1},\ \frac{7\cdot x+5}{4\cdot x+3},\ \frac{19\cdot x+7}{11\cdot x+4},\ \frac{26\cdot x+19}{15\cdot x+11},\ \frac{71\cdot x+26}{41\cdot x+15},\ \frac{97\cdot x+71}{56\cdot x+41},\ \frac{265\cdot x+97}{153\cdot x+56}\right)$$

Dans l'écriture des f-réduites de √(3) apparaissent les réduites de $\sqrt{(3)}$. C'est une invitation à démontrer par récurrence la proposition suivante

pour tout n strictement supérieur à 2 $f_n(x)=\dfrac{x\,k_{n-1}+k_{n-2}}{x\,h_{n-1}+h_{n-2}}$ $\dfrac{k_{n-1}}{h_{n-1}}$ et $\dfrac{k_{n-2}}{h_{n-2}}$ étant les réduites de √α, de rang $n-1$ et $n-2$.

Pour ce faire nous démontrerons la conjonction de deux propositions P_1 et P_2.

Pour tout n strictement supérieur à 2 $f_n(x)=\dfrac{x\,k_{n-1}+k_{n-2}}{x\,h_{n-1}+h_{n-2}}$ et $k_{n-1}h_{n-2}-k_{n-2}h_{n-1}=\pm 1$.

Remarque préalable

De $\frac{k_1}{h_1}=\frac{E_1}{1}$ on déduit $k_1=E_1$ et $h_1=1$ et de $\frac{k_2}{h_2}=E_1+\frac{1}{E_2}=\frac{E_2E_1+1}{E_2}$ on déduit $h_2=E_2$ et $k_2=E_2E_1+1$ car $\frac{E_2E_1+1}{E_2}$ est irréductible.

Initialisation
pour n = 3

$$f_3(x)=E_1+\frac{1}{E_2+\frac{1}{x}}=E_1+\frac{x}{xE_2+1}=\frac{x(E_2E_1+1)+E_1}{xE_2+1}$$

$f_3(x)=\frac{x(E_2E_1+1)+E_1}{xE_2+1}=\frac{xk_2+k_1}{xh_2+h_1}$ d'après la remarque préalable.

De plus

$$k_2h_1-h_2k_1=(E_2E_1+1)-E_1E_2=1$$

Les propositions P_1 et P_2 sont vraies pour $n=3$.

Hérédité

Supposons que pour le rang j $f_j(x)=\frac{xk_{j-1}+k_{j-2}}{xh_{j-1}+h_{j-2}}$ et $k_{j-1}h_{j-2}-k_{j-2}h_{j-1}=\pm 1$.

Au rang $j+1$ l'algorithme retour commence avec $t_1=x$ ce qui donne au rang j $t_2=E_j+\frac{1}{t_1}=\frac{xE_j+1}{x}$.

$f_{j+1}(x)$ se calcule en substituant $\frac{xE_j+1}{x}$ à x dans l'expression de $f_j(x)$.

On obtient

$$f_{j+1}(x)=\frac{(xE_j+1)k_{j-1}+xk_{j-2}}{(xE_j+1)h_{j-1}+xh_{j-2}}=\frac{x(E_jk_{j-1}+k_{j-2})+k_{j-1}}{x(E_jh_{j-1}+h_{j-2})+h_{j-1}} .$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence au rang j pour P_1 on a $f_j(E_j)=\frac{E_jk_{j-1}+k_{j-2}}{E_jh_{j-1}+h_{j-2}}$ par ailleurs $f_j(E_j)=\frac{k_j}{h_j}$, on aura montré l'égalité $f_{j+1}(x)=\frac{xk_j+k_{j-1}}{xh_j+h_{j-1}}$ si l'on peut identifier k_j *avec* $E_jk_{j-1}+k_{j-2}$ et h_j *avec* $E_jh_{j-1}+h_{j-2}$ c'est-à-dire si la fraction $\frac{E_jk_{j-1}+k_{j-2}}{E_jh_{j-1}+h_{j-2}}$ est irréductible. Ce dernier résultat est obtenu grâce au théorème de Bézout :

À partir du calcul $h_{j-1}(E_jk_{j-1}+k_{j-2})-k_{j-1}(E_jh_{j-1}+h_{j-2})=h_{j-1}k_{j-2}-k_{j-1}h_{j-2}$ en utilisant l'hypothèse de récurrence sur P_2 on obtient $h_{j-1}(E_jk_{j-1}+k_{j-2})-k_{j-1}(E_jh_{j-1}+h_{j-2})=\pm 1$ ce qui montre que $E_jk_{j-1}+k_{j-2}$ et $E_jh_{j-1}+h_{j-2}$ sont premiers entre eux. La fraction est irréductible.
On a montré l'hérédité pour la première proposition P_1

L'identification permet alors de réécrire l'expression $h_{j-1}(E_jk_{j-1}+k_{j-2})-k_{j-1}(E_jh_{j-1}+h_{j-2})$

sous la forme $h_{j-1}k_j - k_{j-1}h_j = \pm 1$ ce qui établit l'hérédité pour la deuxième proposition P_2 et achève la démonstration.

Les polynômes de Lagrange

Pour α donné à chaque f-réduite de rang j nous associons un polynôme du second degré de la façon suivante

Pour $j=1$ à la f-réduite $f_1 = \frac{x}{1}$ nous associons $F_1 = x^2 - \alpha$ et pour $j=2$ à la f-réduite $f_2 = \frac{x E_1 + 1}{x}$ le polynôme $F_2(x) = (E_1^2 - \alpha)x^2 + 2E_1 x + 1$ et pour chaque rang $j \geq 2$ à

$f_{j+1}(x) = \frac{x k_j + k_{j-1}}{x h_j + h_{j-1}}$ nous associons le polynôme $F_{j+1}(x) = (x k_j + k_{j-1})^2 - \alpha(x h_j + h_{j-1})^2$

qui une fois réécrit suivant les puissances décroissantes de x donne :

$$F_{j+1}(x) = (k_j^2 - \alpha h_j^2)x^2 + 2(k_j k_{j-1} - \alpha h_j h_{j-1})x + (k_{j-1}^2 - \alpha h_{j-1}^2) \quad .$$

On trouve un polynôme du second degré en x à coefficients dans Z, dont le discriminant réduit vaut

$$(k_j k_{j-1} - \alpha h_j h_{j-1})^2 - (k_{j-1}^2 - \alpha h_{j-1}^2)(k_j^2 - \alpha h_j^2)$$

ce qui en développant se simplifie et s'écrit $\alpha(k_j h_{j-1} - h_j k_{j-1})^2$ et finalement se réduit à α car $h_{j-1}k_j - k_{j-1}h_j = \pm 1$. Le discriminant réduit est donc indépendant du rang considéré, il vaut α.

Pour α donné toutes les formes quadratiques associées aux f-réduites ont le même discriminant réduit, sa valeur est α.

Comme nous l'avons vu précédemment les quantités $(k_{j-1}^2 - \alpha h_{j-1}^2)$ et $(k_j^2 - \alpha h_j^2)$ sont de signes contraires . Dans l'égalité donnant le discriminant réduit

$$(k_j k_{j-1} - \alpha h_j h_{j-1})^2 - (k_{j-1}^2 - \alpha h_{j-1}^2)(k_j^2 - \alpha h_j^2) = \alpha$$

le premier membre peut être vu comme la somme de deux quantités positives $(k_j k_{j-1} - \alpha h_j h_{j-1})^2$ et $-(k_{j-1}^2 - \alpha h_{j-1}^2)(k_j^2 - \alpha h_j^2)$. Cette somme valant α les quantités sont nécessairement bornées.

Pour α donné, chacune des valeurs absolues suivantes $|k_j k_{j-1} - \alpha h_j h_{j-1}|$, $|k_{j-1}^2 - \alpha h_{j-1}^2|$ et $|k_j^2 - \alpha h_j^2|$ est majorée et ne peut donc prendre qu'un nombre fini de valeurs. On en déduit

Pour α donné, le nombre de formes quadratiques associées aux f-réduites est fini. Ce sont les polynômes de Lagrange associés à α .

Deux résultats en découlent immédiatement :

- **Existence d'une solution pour l'équation de Fermat**

À propos de cette équation nous savons déjà que si une solution non triviale existe alors il y en a une infinité.

Les polynômes de Lagrange permettent de montrer l'existence d'une solution particulière (x_0, y_0) .

En effet les expressions $(k_j^2 - \alpha h_j^2)$ ne prennent qu'un nombre fini de valeurs. Donc parmi ces valeurs il y en a au moins une, que nous notons par la lettre c , qui sera obtenue pour une infinité de rang j_1, j_2, ... On a donc $k_{j_1}^2 - \alpha h_{j_1}^2 = c$, $k_{j_2}^2 - \alpha h_{j_2}^2 = c$, ...

Si l'on considère les numérateurs et les dénominateurs des réduites qui interviennent dans ces équations modulo la valeur absolue de c , nous pouvons (principe des tiroirs) extraire de cette suite deux équations $k_{n_1}^2-\alpha h_{n_1}^2=c$ et $k_{n_2}^2-\alpha h_{n_2}^2=c$ vérifiant les conditions

$k_{n_1}\equiv k_{n_2} mod(|c|)$ et $h_{n_1}\equiv h_{n_2} mod(|c|)$ (F).

On obtient alors une solution[3] pour l'équation de Fermat en prenant

$$x_0=\left|\frac{h_{n_1}k_{n_2}-h_{n_2}k_{n_1}}{c}\right| \quad \text{et} \quad y_0=\left|\frac{k_{n_1}k_{n_2}-\alpha h_{n_2}h_{n_1}}{c}\right| .$$

En effet les conditions (F) montrent que x_0 et y_0 sont des entiers naturels c-à-d que c divise $h_{n_1}k_{n_2}-h_{n_2}k_{n_1}$ et aussi $k_{n_1}k_{n_2}-\alpha h_{n_2}h_{n_1}$

par exemple pour $h_{n_1}k_{n_2}-h_{n_2}k_{n_1}=(h_{n_1}-h_{n_2})*k_{n_2}-h_{n_2}*(k_{n_1}-k_{n_2})$, $h_{n_1}-h_{n_2}\equiv 0\, mod(|c|)$ et $k_{n_1}-k_{n_2}\equiv 0\, mod(|c|)$ montrent que c divise $h_{n_1}k_{n_2}-h_{n_2}k_{n_1}$ donc x_0 .

de plus x_0 et y_0 vérifient $y_0^2-\alpha x_0^2=\frac{(k_{n_1}^2-\alpha h_{n_1}^2)(k_{n_2}^2-\alpha h_{n_2}^2)}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}=1$.

L'affirmation de Fermat est donc vraie.

Pour tout entier α non carré l'équation $x^2-\alpha y^2=1$ admet une infinité de solutions non triviales.

- La suite $(E_j)_{j>0}$ créée par l'algorithme des fractions continues est ultimement périodique.

Deux remarques à propos des solutions des équations $F_{j+1}(x)=0$

* Pour un rang j fixé, tout lycéen sait que l'équation du second degré $(k_j^2-\alpha h_j^2)x^2+2(k_jk_{j-1}-\alpha h_jh_{j-1})x+(k_{j-1}^2-\alpha h_{j-1}^2)=0$ possède deux solutions de signes contraires car le terme constant et le coefficient devant x^2 sont de signes contraires, l'équation possède donc une seule solution positive.

Pour α donné, le nombre de formes quadratiques associées aux f-réduites est fini, donc il n'existe qu'un nombre fini de nombres réels positifs qui les annulent.

** Par ailleurs $f_{j+1}(w_j)=\sqrt{(\alpha)}$ donc $\frac{w_jk_j+k_{j-1}}{w_jh_j+h_{j-1}}=\sqrt{(\alpha)}$ On en déduit

$(w_jk_j+k_{j-1})^2=\alpha(w_jh_j+h_{j-1})^2$ ce qui s'écrit $F_{j+1}(w_j)=0$.

Ainsi tous les quotients complets : $w_1, w_2, ...w_i, ...$ qui sont des nombres positifs sont solutions des polynômes de Lagrange associés et il y a une infinité de termes pour seulement un nombre fini de solutions. D'après le principe des tiroirs il existe deux rangs tels que $w_{j_1}=w_{j_2}$.

On en déduit

La suite $(w_i)_{i\geq 1}$ créée par l'algorithme des fractions continues est ultimement périodique et par conséquent la suite des coefficients $(E_i)_{i\geq 1}$ l'est aussi.

3 Pour une solution moins parachutée voir le cours d'arithmétique de Marc Hindry.

Le développement de √α en fraction continue est ultimement périodique.

Observation des formes quadratiques associées aux f-réduites pour α donné.

Le programme FormQua(α, r) donné en annexe renvoie le polynôme de Lagrange associé à α au rang r. Ci dessous les polynômes pour les rangs de un à douze et pour les valeurs 7, 11 et 19 de α.

Tableau I

3 FormQua(7,j)$(j=1..12)	3 FormQua(11,j)$(j=1..12)	3 FormQua(19,j)$(j=1..12)
x^2-7	x^2-11	x^2-19
-3*x^2+4*x+1	-2*x^2+6*x+1	-3*x^2+8*x+1
2*x^2-2*x-3	x^2-6*x-2	5*x^2-4*x-3
-3*x^2+2*x+2	-2*x^2+6*x+1	-2*x^2+6*x+5
x^2-4*x-3	x^2-6*x-2	5*x^2-6*x-2
-3*x^2+4*x+1	-2*x^2+6*x+1	-3*x^2+4*x+5
2*x^2-2*x-3	x^2-6*x-2	x^2-8*x-3
-3*x^2+2*x+2	-2*x^2+6*x+1	-3*x^2+8*x+1
x^2-4*x-3	x^2-6*x-2	5*x^2-4*x-3
-3*x^2+4*x+1	-2*x^2+6*x+1	-2*x^2+6*x+5
2*x^2-2*x-3	x^2-6*x-2	5*x^2-6*x-2
-3*x^2+2*x+2	-2*x^2+6*x+1	-3*x^2+4*x+5

Nous allons à partir de l'observation des données ci dessus conjecturer l'écriture d'un polynôme de Lagrange.

Observations

a) - Un cycle de longueur variable apparaît :

* cycle de longueur quatre pour $\alpha=7$

$$-3x^2+4x+1 \rightarrow 2x^2-2x-3 \rightarrow -3x^2+2x+2 \rightarrow x^2-4x-3 \rightarrow -3x^2+4x+1$$

** de longueur deux pour $\alpha=11$

$$-2x^2+6x+1 \rightarrow x^2-6x-2 \rightarrow -2x^2+6x+1$$

*** de longueur six pour $\alpha=19$

$$-3x^2+8x+1 \rightarrow 5x^2-4x-3 \rightarrow -2x^2+6x+5 \rightarrow 5x^2-6x-2 \rightarrow -3x^2+4x+5 \rightarrow x^2-8x-3$$

b) - Le cycle commence par $F_2(x)=(n^2-\alpha)x^2+2nx+1$ avec $n=E_1$.

c) - Le coefficient devant x^2 d'un polynôme devient le coefficient du terme constant pour le polynôme du rang suivant.

d) - Les coefficients du polynôme changent de signe au rang suivant.

e) - Le déterminant réduit qui vaut α impose entre ces coefficients une liaison forte.

On pose $d_0=1$ et $d_1=\alpha-n^2$ en respectant ces observations le polynôme de rang $j+1$ pour $j\geq 1$ s'écrit $F_{j+1}(x)=(-1)^j(d_j*x^2-2b_{j-1}*x-d_{j-1})$ avec $d_j*d_{j-1}=\alpha-b_{j-1}{}^2$.

Les coefficients d_j et d_{j-1} déterminent le polynôme. Pourtant trouver d_2 à partir de d_1

et d_0 peut ne pas être évident même dans un cas très simple.

Approche empirique sur un exemple

Nous nous proposons pour $\alpha=19$ de retrouver les polynômes que nous avons observés dans le tableau I. Dans ce cas $n=4$ et $d_1=19-4^2=3$.

On a $F_1(x)=x^2-19$ il semble ne jamais être dans la partie périodique qui commence avec $F_2(x)=-3x^2+8x+1=(-1)^1[d_1x^2-2b_0x-d_0]$ $b_0=4,\ d_1=3\ et\ d_0=1$.
Notre recherche commence avec $F_3(x)=(-1)^2(d_2*x^2-2b_1*x-3)$ dont le discriminant réduit est $19=b_1^2+3c_2$ Il y a trois décompositions qui peuvent fournir des candidats pour d_2

$$19-1^2=3*6:$$
$$19-2^2=3*5:$$
$$19-4^2=3*1$$

Comment parmi 6, 5 et 1 déterminer le bon coefficient ?

Comme $n=4$ Nous pouvons réécrire nos égalité

$$19-1^2=3*6=19-(n-3)^2:$$
$$19-2^2=3*5=19-(n-2)^2:$$
$$19-4^2=3*1=19-(n-0)^2$$

Notre problème se résume alors à connaissant le polynôme $F_2(x)=-3x^2+8x+1$ qui correspond à $19-(n-0)^2=3*1$ trouver le polynôme $F_3(x)$ correspondant à $19-(n-r_1)^2=3*d_2$ ou plus généralement connaissant le polynôme $F_{j+1}(x)=(-1)^j(d_j*x^2-2b_{j-1}*x-d_{j-1})$ avec $\alpha-(n-r_{j-1})^2=d_j*d_{j-1}$. Trouver le polynôme $F_{j+2}(x)=(-1)^{j+1}(d_{j+1}*x^2-2b_j*x-d_j)$ qui vérifie $\alpha-(n-r_j)^2=d_{j+1}*d_j$. On remarque que d_j divise $\alpha-(n-r_j)^2$ et $\alpha-(n-r_{j-1})^2$ il divise la différence $(n-r_{j-1})^2-(n-r_j)^2$ c'est à dire le produit $(2n-r_{j-1}-r_j)(r_j-r_{j-1})$.
Cela sera le cas si r_j est le reste de la division euclidienne de $2n-r_{j-1}$ par d_j car alors ce dernier divise le premier facteur du produit.

Appliquons cette "règle" à notre cas particulier.

On détermine r_1 par la division euclidienne de $2*4-0$ par 3 : 8 – 0 =2*3 + 2 $r_1=2$.
L'égalité correspondante à $F_3(x)$ est donc $19-(n-2)^2=19-2^2=3*5$ ce qui détermine $d_2=5$.
On poursuit...

Voici dans le tableau qui suit les résultats obtenus pour les premiers rangs, nous y retrouvons les polynômes de Lagrange déjà observés plus une cerise sur le gâteau qui nous est donnée par la dernière colonne.

j	d_j	Division de $2*4-r_j$ par d_j	r_j	$19-(4-r_j)^2$	Polynômes conjecturés (en bleu)	q_j
0	1		0	1*3	$X^2 - 19$	4
1	3	8 =2*3+ 2	2	3*5	$-3X^2 + 8X +1$	2
2	5	6 =1*5 + 1	1	5*2	$5X^2 - 4X -3$	1
3	2	7 = 3*2+1	1	2*5	$-2X^2 + 6X +5$	3
4	5	7 =1*5 + 2	2	5*3	$5X^2 - 6X -2$	1
5	3	6 =2*3 + 0	0	3*1	$-3X^2 + 4X +5$	2
6	1	8 =8*1 + 0	0	1*3	$X^2 -8X -3$	8
7	3	8 =2*3+ 2	2	3*5	$-3X^2 + 8X +1$	2
8	5	6 =1*5 + 1	1	5*2	$5X^2 - 4X -3$	1
9	2	7 = 3*2+1	1	2*5	$-2X^2 + 6X +5$	3
10	5	7 =1*5 + 2	2	5*3	$5X^2 - 6X -2$	1
11	3	6 =2*3 + 0	0	3*1	$-3X^2 + 4X +5$	2

Les polynômes (sauf les deux premiers) sont obtenus par la "règle" conjecturée. Ils coïncident avec ceux renvoyé par le programme FormQua.

Une observation inattendue
En posant $q_0=n=4$ nous pouvons constater que la dernière colonne du tableau, celle du quotient, coïncide avec le développement en fraction continue de√19 donné par la fonction"dfc" de Xcas : dfc(sqrt(19), 12) [4, 2, 1, 3, 1, 2, 8, [2, 1, 3, 1, 2, 8]].

Cela nous invite à chercher une version "euclidienne" du développement en fractions continues de √α puisque apparemment elle existe[4] !

4 L'article - Développement en fractions continues de √a et division euclidienne - consultable sur le site de l'Irem de la Réunion est consacré à cette question.

Annexe

Le programme ci dessous permet d'obtenir la forme quadratique associée à la f-réduite de rang r. Il correspond au programme donnant la f-réduite auquel s'ajoutent deux lignes supplémentaires à la fin. Ici encore la fonction 'floor' y tient le rôle principal.

```
FormQua( n , r  ):={
local j,k ,f, t , v , w , z , c,a,b,L ;
c:= 1 ; j:=sqrt(n) ;L:=NULL;
while( c < =r ){
t := floor(j); v:= j-t ; w := normal(1 /v); L := L, t ; j := w ; c := c+1;}

k:=r-1; z:=x;f:=z; while(k>0){ f:= normal(L[k-1]+1/z) ; z:=f; k:=k-1}
a:=denom(f);b:=numer(f);
print(normal(b^2-n*a^2));
}
:;
```

```
// Parsing FormQua
// Warning: x, declared as global variable(s) compiling FormQua
Done
```

Le programme équivalent à l'aide de la "règle" conjecturée

```
Lagrange(a,r):={
local n,l,j,k,R,r1,q,c,d,c1,c2,b,c;
print(x^2-a);
k:=1;while(k^2<a){ k:=k+1;};n:=k-1;
j:=-1;r1:=0;R:=0;d:=1;b:=n-R;c2:=a-n^2;c1:=1;c:=c2;
print(j*c*x^2-j*2*b*x-j*c1);
while(d<r){
j:=-j; q:=iquo(2*n-r1,c);R:=irem(2*n-r1,c);
b:=n-R;c:=c1+(R-r1)*q;r1:=R;c1:=c2;c2:=c;print(j*c*x^2-j*2*b*x-j*c1);d:=d+1;}}
:;
```

```
// Parsing Lagrange
// Warning: x, declared as global variable(s) compiling Lagrange
Done
```

```
Lagrange(13,12)
x^2-13
-4*x^2+6*x+1
3*x^2-2*x-4
-3*x^2+4*x+3
4*x^2-2*x-3
-x^2+6*x+4
4*x^2-6*x-1
-3*x^2+2*x+4
3*x^2-4*x-3
-4*x^2+2*x+3
x^2-6*x-4
-4*x^2+6*x+1
```