

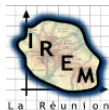
Théorie de Conway

Nombres et jeux

Alain Busser

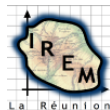
IREM de La Réunion

29 mars 2019



John Horton Conway

né le 26 décembre 1937 à Liverpool

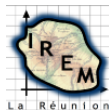


Sowing

jeu inventé par Conway



C'est à *Gauche* de jouer ; il ne peut semer que vers la droite.

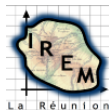


Sowing

jeu inventé par Conway

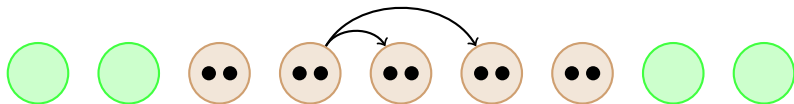


C'est à *Gauche* de jouer ; il ne peut semer que vers la droite.

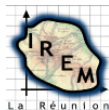


Sowing

jeu inventé par Conway



C'est à *Gauche* de jouer ; il ne peut semer que vers la droite.

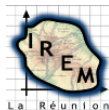


Sowing

jeu inventé par Conway

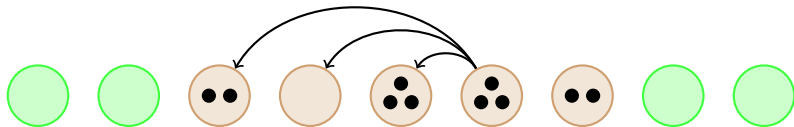


C'est à *Droite* de jouer ; il ne peut semer que vers la gauche.

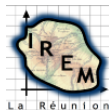


Sowing

jeu inventé par Conway



C'est à *Droite* de jouer ; il ne peut semer que vers la gauche.

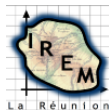


Sowing

jeu inventé par Conway



C'est à *Gauche* de jouer; il ne peut semer que vers la droite.

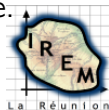


Sowing

jeu inventé par Conway



C'est à *Gauche* de jouer ; il ne peut semer que vers la droite.

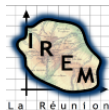


Sowing

jeu inventé par Conway

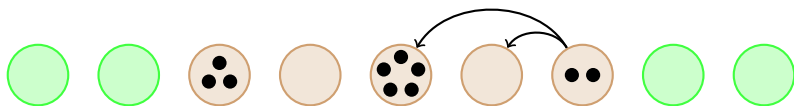


C'est à *Droite* de jouer ; il ne peut semer que vers la gauche.

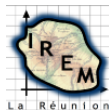


Sowing

jeu inventé par Conway



C'est à *Droite* de jouer ; il ne peut semer que vers la gauche.

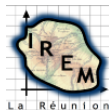


Sowing

jeu inventé par Conway

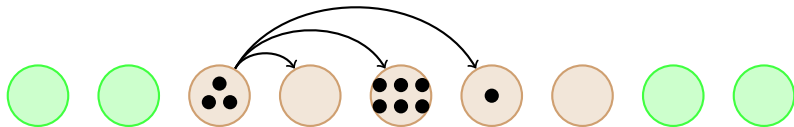


C'est à *Gauche* de jouer; il ne peut semer que vers la droite.

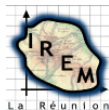


Sowing

jeu inventé par Conway



C'est à *Gauche* de jouer ; il ne peut semer que vers la droite.

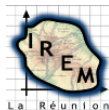


Sowing

jeu inventé par Conway

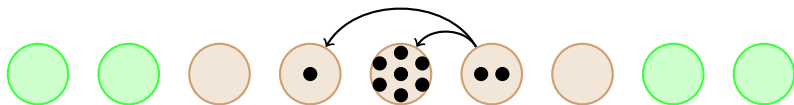


C'est à *Droite* de jouer ; il ne peut semer que vers la gauche.

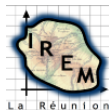


Sowing

jeu inventé par Conway



C'est à *Droite* de jouer ; il ne peut semer que vers la gauche.

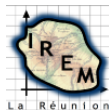


Sowing

jeu inventé par Conway



C'est à *Gauche* de jouer ; il ne peut plus semer vers la droite. Il a perdu.

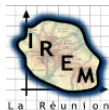


Le jeu vide

un jeu plutôt équitable !



Quel que soit le prochain joueur, il ne peut jouer.

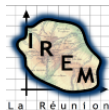


Le nombre 0

un jeu plutôt équitable !



Chaque joueur a devant lui un jeu vide. On dit que le nombre de graines est ∞ .

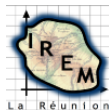


Le nombre 1

un jeu à l'avantage de Gauche



Droite ne peut pas jouer. Gauche a une option de jeu qui transforme ce jeu en le jeu 0.

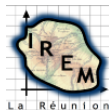


Le nombre -1

un jeu à l'avantage de Droite



Gauche ne peut pas jouer. Droite a une option de jeu qui transforme ce jeu en le jeu 0.

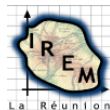


Le nombre 0

une autre version



Chaque joueur a devant lui un jeu vide. Ce jeu est aussi égal à 0.

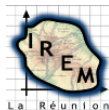


Le nombre 1

une autre version

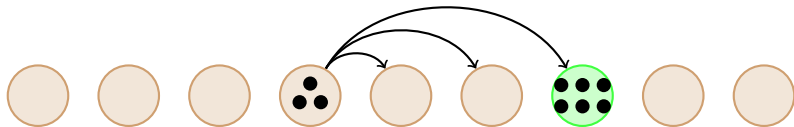


Droite ne peut aller que vers le jeu 2 qui est à l'avantage de Gauche. Gauche peut aller vers le jeu 0. Ce jeu est aussi égal à 1.

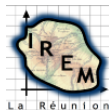


Le nombre 2

vers une construction des entiers



Droite a devant lui un jeu vide. Gauche peut aller vers le jeu 1.
Ce jeu est donc égal à 2.

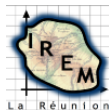


Le nombre 3

vers une construction des entiers



Droite a devant lui un jeu vide. Gauche peut aller vers le jeu 2.
Ce jeu est donc égal à 3.

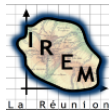


Le nombre 4

vers une construction des entiers



Droite a devant lui un jeu vide. Gauche peut aller vers le jeu 3.
Ce jeu est donc égal à 4.

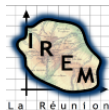


Le nombre 2

Une autre forme du nombre 2

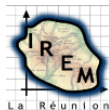


Gauche peut semer les deux graines et arriver au jeu 1. Ce jeu vaut donc 2.



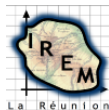
Le nombre 3

Une construction généralisable des entiers



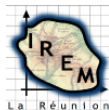
Le nombre 4

Une construction généralisable des entiers



Le nombre 5

Une construction généralisable des entiers



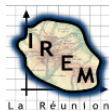
Généralisation

Jeff Erickson, 1996

Théorème

Si $n \geq 1$ et s'il y a n cases ne contenant qu'une graine alors

$$[2, 0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1] = n + 1$$

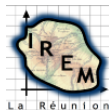


Addition

Où l'on découvre que $2 + 2 = 4$



Gauche a deux coups d'avance sur Droite à gauche mais aussi à droite, cela fait 4 coups d'avance : Ce jeu est la somme de deux jeux valant 2 chacun.

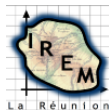


Addition des relatifs

Où l'on découvre que $2 - 1 = 1$



Le jeu de gauche vaut 2 et celui de droite vaut -1 ; leur somme est $2 + (-1) = 1$.

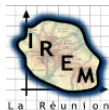


Le nombre 0

Le retour de 0



En analysant ce jeu, on découvre que le premier qui le joue est perdant. Sa valeur est donc 0.

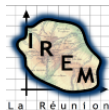


Le nombre 0

Le retour de 0



Ce jeu est l'opposé du précédent. Sa valeur est donc également nulle.

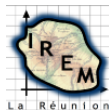


Le nombre 1

Le retour de 1



Droite a le jeu vide. Si Gauche joue, il arrive au jeu précédent qui est nul. Ce jeu vaut donc 1.



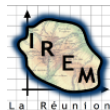
Le nombre 0,5

Un nouveau nombre



Si Droite joue, il offre le jeu 1 à Gauche qui gagne. Si Gauche joue, il aboutit au jeu nul. L'avantage est donc à Gauche, mais cet avantage est à la fois supérieur à 0 et inférieur à 1 :

Conway l'évalue à $\frac{1}{2} = 0,5$

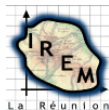


Le nombre $\frac{1}{4}$

Encore un nouveau nombre



Ce jeu est à la fois supérieur à 0 et inférieur à $\frac{1}{2}$: Conway l'évalue à $\frac{1}{4} = 0,25$

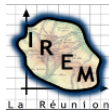


Le nombre $\frac{1}{8}$

Vers les fractions dyadiques



Ce jeu est à la fois supérieur à 0 et inférieur à $\frac{1}{4}$: Conway l'évalue à $\frac{1}{8} = 0,125$

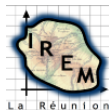


Le nombre $\frac{1}{16}$

Vers les réels

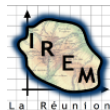
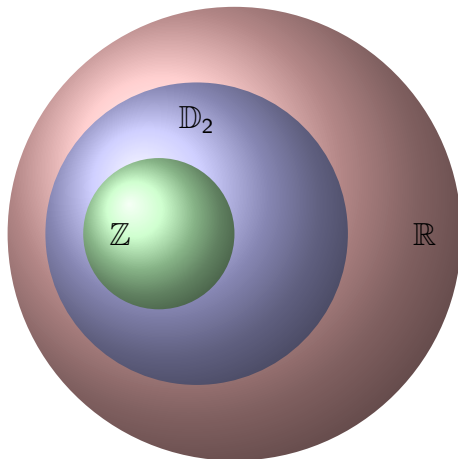


Ce jeu est à la fois supérieur à 0 et inférieur à $\frac{1}{8}$: Conway l'évalue à $\frac{1}{16} = 0,0625$



les hyperréels

John Conway, Donald Knuth

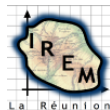


L'étoile de Conway

Ce jeu n'est pas un nombre



Le premier qui joue aboutit au jeu nul : Ce jeu n'est pas nul.
 Conway le note $*$. Ce jeu est inférieur à $\frac{1}{2}$, à $\frac{1}{4}$, à $\frac{1}{8}$ etc. et
 supérieur à $-\frac{1}{2}$, à $-\frac{1}{4}$, à $-\frac{1}{8}$ etc et pourtant n'est pas nul.
 Conway note ceci : $* \parallel 0$

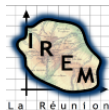


Le retour de l'étoile

I am not a number, I am a number



Chaque joueur peut mener ce jeu à 0 : Sa valeur est là aussi l'étoile.

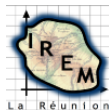


Le retour de 0

0 est un nombre

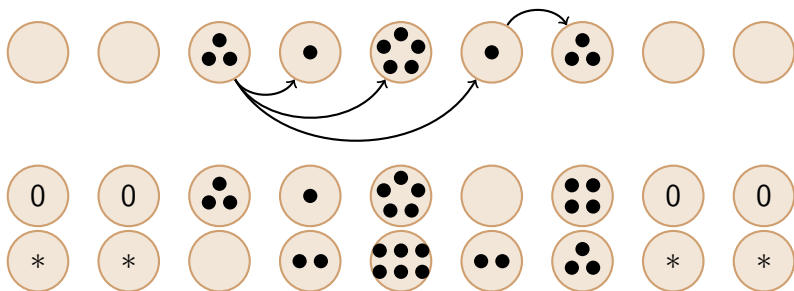


Le premier joueur perd : Ce jeu vaut 0.

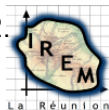


La double étoile

I am not a number, I am a nimber



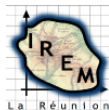
Gauche peut offrir soit 0 soit * à Droite : Ce jeu se note *2.



Le jeu *up*



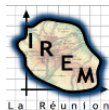
Si Gauche joue, il laisse 0 à Droite qui perd. Si Droite joue, il laisse * à Gauche qui gagne. Ce jeu, noté \uparrow , est donc strictement positif. Mais $\uparrow < \frac{1}{2}$, $\uparrow < \frac{1}{4}$, $\uparrow < \frac{1}{8}$ etc. Ce jeu est un nombre infinitésimal strictement positif.



Le jeu *double up*



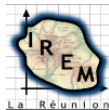
Ce jeu est infinitésimal mais strictement supérieur à \uparrow . On le note $\uparrow\uparrow$ et on a $\uparrow\uparrow = \uparrow + \uparrow$.



Le jeu *triple up*



$$\uparrow\uparrow\uparrow = \uparrow\uparrow + \uparrow.$$



Hyperréels

structure des infinitésimaux

