Devoir de mathématiques
Groupes opérant sur un ensemble

Exercice I (Permutations)

Soit n un entier ≥ 1. On désigne par I_n le nombre d'éléments $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tels que $\sigma^2 = id$, où id désigne l'élément neutre du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$.

1. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Caractériser la propriété $\sigma^2 = id$ sur la décomposition de σ en cycles disjoints.
2. En déduire l'expression :
$$I_n = \sum_{0 \leq p \leq \frac{n}{2}} \frac{n!}{2^p p!(n-2p)!}$$
3. Sans utiliser l'expression trouvée en 2, prouver, si $n \geq 2$, que $I_{n+1} = I_n + I_{n-1}$.

Exercice II (Le groupe G168)

Dans cet exercice, on note $\mathcal{P}$ la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7]$ et on considère l'action à gauche naturelle de $\mathcal{S}_7$ sur $\mathcal{S}_7$ donnée par :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}_7 \times \mathcal{P} & \rightarrow & \mathcal{P} \\ (\sigma, P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7)) & \mapsto & P(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)}, X_{\sigma(4)}, X_{\sigma(5)}, X_{\sigma(6)}, X_{\sigma(7)}) \end{array}$$

que l'on notera en abrégé : $\sigma \star P$.
On notera $\mathcal{K}$ l'élément de $\mathcal{P}$ défini par :

$$\mathcal{K} = X_1X_2X_4 + X_2X_3X_5 + X_3X_4X_6 + X_4X_5X_7 + X_5X_6X_1 + X_6X_7X_2 + X_7X_1X_3.$$

Dans $\mathcal{S}_7$, on considère les éléments $c = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ et $b = (1, 2)(3, 6)$. Enfin, on note K le sous-groupe de $\mathcal{S}_7$ engendré par les éléments $\{b, c\}$. On vérifiera que $K \subset \mathcal{A}_7$ et que $K \subset Stab(\mathcal{K})$ (*i.e le stabilisateur de l'élément* $\mathcal{K}$ *pour l'action naturelle définie-ci dessus).*

Partie I

1. Calculer cb. En déduire que $Card(K)$ est divisible par 3 et 7.
2. Calculer $q = c^{-1}bcb$ et $\beta = c^{-1}bc$. montrer que le groupe G est engendré dans $\mathcal{S}_7$ par $\{q, \beta\}$ est de cardinal 8, isomorphe au groupe diédral $\mathcal{D}_4$.
   En déduire que $Card(K)$ est divisible par le nombre $2^3 \times 3 \times 7 = 168$.
3. Montrer que la $\mathcal{A}_7$-orbite de $\mathcal{K}$ contient au moins 8 éléments. (*on pourra faire agir sur* $\mathcal{K}$ *des éléments involutifs de* $\mathcal{A}_7$). En déduire que $Card(K) = 168$.

Partie II

Soit H un sous-groupe d'un groupe G. On appelle enveloppe normale de H dans G que nous noterons $E_H(G)$, l'intersection des sous-groupes distingués de G contenant H. On dit aussi la clôture normale de$H$ dans G. C'est le plus-petit sous-groupe distingué de G contenant H. On note Γ le sous-groupe de K engendré par c.

1. Vérifier que $q \in E_K(\Gamma)$ et que $E_K(\Gamma)$ contient un élément d'ordre 3. (*calculer* $cbcb$)
2. Calculer $q' = bcbc^{-1}$, puis $r = q'^2q^2q'^2q^2$. En déduire que $E_K(\Gamma) = K$.

Partie III

1. Soit N un sous-groupe fini distingué d'un groupe G, et soit H un sous-groupe d'indice fini de G. On suppose que les entiers $Card(N)$ et $[G : H]$ sont premiers entre eux. Montrer que $N \subset H$.
2. Soit un sous-groupe d'indice fini d'un groupe G, et soit H un sous-groupe fini de G. On suppose que les entiers $[G : N]$ et $Card(H)$ sont premiers entre aux. Démontrer que $H \subset N$.

Partie IV

Soit G un groupe opérant à gauche sur un ensemble non vide E. Les stabilisateurs et orbites seront notés $Stab_G(.)$ et $Orb_G(.)$. On appelle G-bloc de E toute partie non vide X de E telle que pour tout $g \in G$, on ait $g.X = X$ ou $g.X \cap X = \emptyset$. Un tel G-bloc est dit trivial si c'est ou bien E, ou bien un singleton. L'action de G sur E est dite primitive si on a les conditions suivantes :
- $Card(E) \geq 2$;
- l'action de G sur E est transitive ;
- les seuls G-blocs de E sont les G-blocs triviaux.

1. Supposons $card(E) \geq 2$ et l'action transitive. Prouver que l'action de G sur E est primitive si et seulement si les sous-groupes $Stab_G(a)$ sont maximaux où $a \in E$. (*maximaux en tant qu'ensemble ordonné pour l'inclusion pour les sous-groupes stricts de* G)
2. Supposons l'action de G sur E primitive et fidèle. Soit N un sous-groupe distingué de G autre que $\{e\}$. Montrer que l'action de G sur E est transitive.
3. On suppose l'ensemble E fini.
   (a) Lorsque l'action de G sur E est transitive, montrer que le cardinal de tout G-bloc divise le cardinal de E.
   (b) Lorsque $Card(E)$ est un nombre premier et que l'action de G sur E est transitive, montrer que celle-ci est primitive.

Partie V

On reprend toutes les notations de la partie I. On considère l'action à gauche naturelle de K sur $E = [\![1, 7]\!]$. Le but de cette partie est de prouver que le groupe K est simple. Pour cela on considère un sous-groupe distingué N de K, distinct de $\{e\}$. Il s'agit de prouver que $N = K$.

1. Montrer que l'action de K sur E est primitive (*utiliser la partie IV*), en déduire que l'action de N sur E est transitive.
2. En déduire que $Card(N)$ est divisible par 7. En appliquant les résultats de la partie III, en déduire que $\Gamma \subset N$.
3. En déduire que $N = K$ et conclure.