Résumé

On choisit les séries de Fourier comme décor, et on présente, autour du thème retenu, des méthodes d´analyse instructives et essentielles pour mener à bien quelques problèmes classiques ou parfois originaux. La transformation d´Abel et le raisonnement par densité-fermeture sont, pour exemples, maintes fois illustrés, voire décortiqués. Des techniques plus subtiles, comme la "découpe-variable" lorsqu´on estime certaines sommes, trouvent aussi leur place.

On a tout au long du texte le souci d´illustrer, et afin de donner à l´ensemble une certaine unité, on évite trop de dispersions dans le choix des exemples. Ainsi un résultat est souvent réinvesti ou sert de tremplin pour illustrer un autre outil ; l´égalité $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n} = \frac{\pi - t}{2}$ valable pour $0 < t < 2\pi$ est établie par la méthode de sommation d´Abel-Poisson et est réobtenue un peu plus tard par le lemme de Riemann-Lebesgue. On retrouve cette série de sinus (et sa convergence uniforme compacte sur $]0, 2\pi[$) lorsqu´on justifie la curieuse égalité $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$, qui par ailleurs tombe après une utilisation du théorème de Dirichlet. Cette égalité est d´autant plus amusante qu´on rencontre sa "version intégrale" $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$.

Autre objectif du texte, mettre en parallèle le discret et le continu. C´est l´occasion de montrer quelques analogies entre les séries entières et les transformées de Laplace, d´établir $\sum_{n=1}^{N} \frac{|\sin n|}{n} \sim_{+\infty} \frac{2}{\pi} \ln N$ (question posée dans RMS4-2002) avec en tête le très classique $\int_1^{X} \frac{|\sin t|}{t} dt \sim_{+\infty} \frac{2}{\pi} \ln X$...

Enfin, certains résultats importants sont approchés sous plusieurs angles ; la densité des polynômes trigonométriques dans $(\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \| \quad \|_{\infty})$ est par exemple prouvée par densité-fermeture, envisagée différemment en annexe (point de vue de Korovkin), et établie de façon originale (page 22) grâce au noyau de Gibbs.

Première partie

Vers le développement de Fourier

1 Des polynômes aux polynômes trigonométriques

A] coefficients d´un polynôme

On considère un polynôme $P(X)$ de $\mathbb{C}[X]$ qui s´ecrit $\sum_{k=0}^{n} c_k X^k$.
La fonction $t \mapsto P(e^{it})$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall 0 \leqslant k \leqslant n \qquad \int_0^{2\pi} P(e^{it})e^{-ikt}dt = \sum_{l=0}^{n} \int_0^{2\pi} c_l e^{i(l-k)t}dt = \sum_{l=0}^{n} 2\pi c_l \delta_{k,l}$$

donc chaque coefficient c_k est donné par la relation :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(e^{it})e^{-ikt}dt = c_k \quad (0 \leqslant k \leqslant n)}$$

En particulier, on a :

$$P(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(e^{it})dt \qquad (= c_0)$$

corollaire pour $a \in \mathbb{C}$ et $\rho \in \mathbb{R}_+^*$,

$$P(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(a + \rho e^{it})dt$$

(appliquer l´égalité précédente au polynôme $P(a + \rho X)$)

Cette relation exprime que la valeur d´un polynôme $P(X)$ au centre d´un disque est égale à la valeur moyenne de $P(X)$ sur le cercle-frontière.

On dit que les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ possèdent la propriété de la moyenne.

Remarque : par linéarité de l´application "partie réelle" Re, la fonction $Re(P)$ (qui est à valeurs réelles) possède aussi la propriété de la moyenne.

application : principe du maximum Un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant n´a pas de maximum local sur $\mathbb{C}$.

Par l´absurde, $\exists a \in \mathbb{C} \quad \exists r > 0 \quad \forall z \in \overline{D(a,r)} \quad | P(a) | \geqslant | P(z) |$ avec $| P(a) |$ nécessairement non nul (Sinon, la fonction polynômiale P s´annule sur $\overline{D(a,r)}$ et est donc identiquement nulle)

Quitte à remplacer P par $\frac{1}{|P(a)|}P(a+rX)$,
on peut supposer : $a=0\,;\, r=1\,;\ \mid P\mid\leqslant 1=\mid P(0)\mid$ sur $\bar{D}=\overline{D(0,1)}$.
Enfin, en multipliant au besoin P par un complexe de module 1, on se ramène au cas où $P(0)=1$

On envisage l´application $g\ :\ z\mapsto Re(1-P(z))=1-Re(P(z))$ de $\bar{D}$ dans $\mathbb{R}$.

- $g\geqslant 0$ sur $\bar{D}$ car $g=1-Re(P)\geqslant 1-\mid P\mid$

- Pour $z\in\bar{D}$, $g(z)=0\Leftrightarrow Re(P(z))=1$
$\Leftrightarrow\mid P(z)\mid=Re(P(z))=1\quad$ car $1\geqslant\mid P(z)\mid\geqslant Re(P(z))$
$\Leftrightarrow P(z)=1$
Autrement dit, la fonction g détecte les endroits où $P(X)$ prend la valeur 1.

Puisque g possède la propriété de la moyenne,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{it})dt=g(0)=0$$

Par continuité et positivité de $t\mapsto g(e^{it})$ sur $[0,2\pi]$, on a :

$$\forall t\in[0,2\pi]\quad g(e^{it})=0\quad ie\quad P(e^{it})=1$$

Le polynôme $P-1$ a donc une infinité de racines, donc $P(X)$ est le polynôme constant 1. Contradiction.

exercice Soit : $a_1,a_2,...,a_n$ n nombres complexes.
Montrer qu´il existe un complexe z_0 de S^1 tel que la distance de z_0 à l´origine soit inférieure à la moyenne des distances de z_0 aux a_k.

a) On pose : $P(X)=\prod_{1\leqslant k\leqslant n}(X-a_k)$. $P(X)$ s´ecrit aussi $\sum_{k=0}^n c_kX^k$.
La fonction $\mid P\mid$, continue sur le compact S^1, est bornée et atteint son maximum M en un certain z_0 de S^1.
Pour tout $0\leqslant k\leqslant n$, $\mid c_k\mid\leqslant\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mid P(e^{it})\mid dt\leqslant M$.
En particulier, $c_n=1\leqslant M=\mid P(z_0)\mid$

b) Par croissance de $x\mapsto x^{\frac{1}{n}}$ sur $[1,+\infty[$, on a : $1\leqslant\prod_{1\leqslant k\leqslant n}\mid z_0-a_k\mid^{\frac{1}{n}}$ et par l´inégalité arithmético-géométrique,

$$1=\mid z_0-0\mid\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\mid z_0-a_k\mid$$

B] formule de Parseval

Pour θ dans $\mathbb{R}$, on a : $\mid P(e^{i\theta}) \mid^2 = P(e^{i\theta})\overline{P(e^{i\theta})} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} c_k\overline{c_j}e^{i(k-j)\theta}$
donc : $\int_0^{2\pi} \mid P(e^{i\theta}) \mid^2 d\theta = 2\pi \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} c_k\overline{c_j}\delta_{k,j} = 2\pi\sum_{k=0}^{n} \mid c_k \mid^2$

d´où la formule de Parseval :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid P(e^{i\theta}) \mid^2 d\theta = \sum_{k=0}^{n} \mid c_k \mid^2}$$

exercice Soit : $P(X) = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$ un polynôme unitaire de $\mathbb{C}[X]$ tel que : $P(S^1) \subset S^1$. Montrer que : $P(X) = X^n$
Retrouver le principe du maximum pour les polynômes unitaires.

On a : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid P(e^{i\theta}) \mid^2 d\theta = 1$ car $\forall\theta \in [0, 2\pi]$ $\mid P(e^{i\theta}) \mid^2 = 1$
donc : $\sum_{k=0}^{n-1} \mid c_k \mid^2 + 1 = 1$. Ceci impose : $c_k = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$
ie $P(X) = X^n$

Pourquoi ne peut-on pas avoir : $\mid P \mid \leqslant \mid P(0) \mid = 1$ sur $\bar{D}$?

On raisonne par l´absurde. Il vient : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid P(e^{it}) \mid dt \leqslant \mid P(0) \mid$
Par ailleurs, l´égalité $P(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(e^{it})dt$ donne $\int_0^{2\pi} \mid P(e^{it}) \mid dt \geqslant \mid P(0) \mid$

On a alors :

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{[1 - \mid P(e^{it}) \mid]}_{int\acute{e}grande\, nulle\, car\, continue\, positive} dt = 0$$

donc : $P(S^1) \subset S^1$, donc : $P(X) = X^n$.
Impossible car $\mid P(0) \mid = 1$

exercice Soit : $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) = 1$ et $P(1) = 0$.
Alors il existe $\xi \in S^1$ tel que : $\mid P(\xi) \mid \geqslant \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$

On a : $a_0 = 1$ et $1 + a_1 + ... + a_n = 0$
Par Cauchy-Scharwz, $1 = \mid a_1 + ... + a_n \mid^2 \leqslant n\,[\mid a_1 \mid^2 + ... + \mid a_n \mid^2]$
d´où : $1 + \frac{1}{n} \leqslant \mid a_0 \mid^2 + \mid a_1 \mid^2 + ... + \mid a_n \mid^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid P(e^{i\theta}) \mid^2 d\theta$
Par la formule de la moyenne appliquée à la fonction réelle continue $\theta \mapsto \mid P(e^{i\theta}) \mid^2$, on choisit $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ tel que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid P(e^{i\theta}) \mid^2 d\theta = \mid P(e^{i\theta_0}) \mid^2$$

D´où le résultat.

remarque : cette formule de Parseval n´est pas équilibrée ; le membre de droite est donné par les $n+1$ coefficients $c_0, ..., c_n$ qui définissent $P(X)$ alors que le membre de gauche nécessite la connaissance "continue" de $P(X)$ sur S^1. On peut en fait discrétiser S^1 par les racines $(n+1)^{ème}$ de 1 et remplacer $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid P(e^{i\theta}) \mid^2 d\theta$ par $\frac{1}{n+1}\sum_{l=0}^{n} \mid P(\omega_n^l) \mid^2$ où $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n+1}}$.

$(\sum_{l=0}^{n} \mid P(\omega_n^l) \mid^2 = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} c_k\overline{c_j}\sum_{l=0}^{n}\omega_n^{(k-j)l} = (n+1)\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} c_k\overline{c_j}\delta_{k,j})$

2 Des séries entières aux séries trigonométriques

A] coefficients d´une série entière

Soit : $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R (R dans $\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$) et soit : $0 < r < R$.
On note f l´application $z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de $D(0,R)$ dans $\mathbb{C}$ (continue sur le disque ouvert de convergence) et g_r l´application $\theta \longmapsto f(re^{i\theta})$ continue sur $\mathbb{R}$.

1] **Egalités de Cauchy**

Pour p fixé dans $\mathbb{N}$, pour $n \geqslant 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, on a :

$$\mid a_n r^n e^{i(n-p)\theta} \mid \leqslant \mid a_n \mid \ r^n \quad et \quad \sum \mid a_n \mid \ r^n \ converge$$

donc $\sum a_n r^n e^{i(n-p)\theta}$ converge normalement en θ sur $[0, 2\pi]$.

Il vient par interversion des signes de sommation :

$$\int_0^{2\pi} g_r(\theta)e^{-ip\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ip\theta}d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)\theta}d\theta = 2\pi a_p r^p$$

c.a.d :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ip\theta}d\theta = a_p r^p \quad (p \geqslant 0)}$$

exercice : théorème de LIOUVILLE On suppose : $R = +\infty$ et f bornée sur $\mathbb{C}$. Alors f est constante sur $\mathbb{C}$.

$$\forall n \geqslant 1 \quad \forall r > 0 \quad \mid a_n \mid \leqslant \frac{1}{r^n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \parallel f \parallel_\infty \ d\theta \leqslant \frac{\parallel f \parallel_\infty}{r^n}$$

On fait tendre r vers $+\infty$ et on obtient :
$\forall n \geqslant 1 \qquad a_n = 0$

exercice : contrôle polynômial de $\mid f \mid$ On suppose : $R=+\infty$
On suppose aussi :

$$\exists (M,C)\in]0,+\infty[^2) \quad (\exists k\in\mathbb{N}) \quad [\mid z\mid > C \Longrightarrow \mid f(z)\mid \leqslant M\mid z\mid^k]$$

Alors f est un polynôme.

Pour $r>C$ et $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$2\pi\mid a_n\mid r^n = \mid \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta \mid \leqslant \int_0^{2\pi}[Mr^k]d\theta = 2\pi\, Mr^k$$

Le membre de gauche est équivalent en $+\infty$ à $2\pi\mid a_n\mid r^n$ et le membre de droite à $2\pi Mr^k$. L´inégalité impose : $a_n=0$ pour $n>k$.

2] **Et la partie réelle s´en mêle**

On note P la partie réelle de f. Pour $R>r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$, on écrit :

$$2\,P(re^{i\theta}) = \sum_{p=0}^{+\infty} r^p(a_p\,e^{ip\theta}+\overline{a_p}\,e^{-ip\theta})$$

Par convergence normale en θ sur $[0,2\pi]$, on a :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^* \quad a_n=\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}P(re^{i\theta})\,e^{-in\theta}d\theta \quad ; \quad 2Re(a_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}P(re^{i\theta})d\theta}$$

exercice : contrôle polynômial discret de $Re(f)$ Donnée : $R=+\infty$
On suppose qu´il existe une suite $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de réels positifs, croissante vers $+\infty$, et qu´il existe 2 réels strictement positifs C et k tels que :

$$(\forall\theta\in\mathbb{R}) \quad (\forall j\in\mathbb{N}) \quad P(r_je^{i\theta})\leqslant C\,r_j^k$$

(Autrement dit, sur chaque cercle $\mathcal{C}(0,r_j)$, la partie réelle de f est dominée par le monôme Cz^k)
Alors f est un polynôme de degré inférieur à k.

Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et pour j dans $\mathbb{N}$, $a_n=\frac{1}{\pi r_j^n}\int_0^{2\pi}[P(r_je^{i\theta})-Cr_j^k]e^{-in\theta}d\theta$ donc :

$$\mid a_n\mid \leqslant \frac{1}{\pi r_j^n}\int_0^{2\pi}[Cr_j^k-P(r_je^{i\theta})]d\theta = \frac{1}{\pi r_j^n}[2\pi Cr_j^k-2\pi Re(a_0)].$$

Pour n fixé supérieur strictement à k, on obtient : $a_n=0$ en faisant tendre j vers $+\infty$.

exercice On suppose : $R \geqslant 1$. Si $P = Re(f)$ est à valeurs positives, alors : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad | a_n | \leqslant 2\, Re(a_0)$.

Pour $0 < r < 1$ et $1 \leqslant n$, on a : $a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} P(re^{i\theta})\, e^{-in\theta} d\theta$
donc $\pi r^n \mid a_n \mid \leqslant \int_0^{2\pi} P(re^{i\theta}) d\theta = 2\pi Re(a_0)$, d´où le résultat en faisant tendre r vers 1.

remarque Si on note Q la partie imaginaire de f, on a $Q = Re(-if)$ donc :

$$\boxed{\forall 0 < r < R \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \frac{i}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} Q(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta}$$

exercice On suppose que R est supérieur ou égal à 1, que (a_n) est une suite de réels avec $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Si f est injective, alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad | a_n | \leqslant n$.

Pour $z \in D$, les coefficients a_n étant réels, on a : $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.
$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow f(z) = f(\bar{z})$ (f est injective)$\Leftrightarrow f(z) = \overline{f(z)} \Leftrightarrow f(z) \in \mathbb{R}$.
$Q = Im(f)$, continue sur le connexe (convexe) $\Omega = D \cap \{Im(z) > 0\}$, ne s´annule pas sur Ω donc Q y garde un signe constant. Or, pour $t > 0$, $Q(it) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n t^{2n+1} \sim_{0^+} t$, donc pour t voisin de 0^+, $Q(it)$ et t ont le même signe, d´où : $Q > 0$ sur Ω.

Soit à présent $r \in]0, 1[$.
On vérifie facilement que $\theta \mapsto Q(re^{-i\theta})$ est impaire, donc pour $n \in \mathbb{N}^*$, le réel a_n s´écrit : $a_n = \frac{2}{\pi r^n} \int_0^{\pi} Q(re^{i\theta}) \sin n\theta \, d\theta$. Avec $Q(re^{i\theta}) > 0$ sur $]0, \pi[$, $\mid a_n \mid \leqslant \frac{2}{\pi r^n} \int_0^{\pi} Q(re^{i\theta}) \mid \sin n\theta \mid d\theta$. Enfin, par recurrence sur n : $\mid \sin n\theta \mid \leqslant n \sin \theta$, ce qui donne : $\mid a_n \mid \leqslant \frac{n a_1}{r^{n-1}} = \frac{n}{r^{n-1}}$. D´où le résultat en faisant tendre r vers 1.

3] Noyer le Poisson ?

• En multipliant au besoin f par un complexe de module 1,
on peut supposer $a_0 \in \mathbb{R}$.
Pour $\mid z \mid < r$ et $t \in [0, 2\pi]$, on a :

$$\mid P(re^{it}) \, (\frac{z}{re^{it}})^n \mid \leqslant (\frac{\mid z \mid}{r})^n \; \| \; t \mapsto \mid P(re^{it}) \mid \|_\infty$$

donc, par convergence normale en t, on a :

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P(re^{it})}{(re^{it})^n} dt] z^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(re^{it}) [1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{z}{re^{it}})^n] dt$$

Or : $1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{z}{re^{it}})^n = \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z}$

d´où :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(re^{it})[\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}]dt$$

En prenant la partie réelle des 2 membres, on obtient la formule de Poisson :

$$P(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(re^{it})\frac{r^2 - \mid z \mid^2}{\mid re^{it}-z \mid^2}dt \qquad (\mid z \mid < r < R)$$

qui s´écrit aussi :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall 0 \leqslant \rho < r \quad P(\rho e^{ix}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(re^{i(t-x)})\underbrace{\frac{r^2-\rho^2}{r^2 - 2r\rho\cos t + \rho^2}}_{noyau\, de\, Poisson} dt$$

Cette formule intégrale exprime la fonction P dans le disque $D(0,r)$ à l´aide de P sur le bord du disque .

• Diverses expressions du noyau de Poisson.

On pose :

$$\boxed{\mathcal{P}_\rho(\theta) = \frac{r^2-\rho^2}{r^2 - 2r\rho\cos\theta + \rho^2} \qquad (\theta \in \mathbb{R})}$$

A ρ fixé dans $[0,r[$, $\mathcal{P}_\rho(.)$ est une fonction 2π-périodique continue et à valeurs positives sur $\mathbb{R}$.

$\mathcal{P}_\rho(\theta) = Re[\frac{1+\frac{\rho}{r}e^{-i\theta}}{1-\frac{\rho}{r}e^{-i\theta}}] = Re[(1+\frac{\rho}{r}e^{-i\theta})\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{\rho}{r})^n e^{-in\theta}] = Re[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\rho}{r})^n e^{-in\theta}]$

donc :

$$\boxed{\mathcal{P}_\rho(\theta) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\rho}{r})^n\cos(n\theta)}$$

Voici un portrait intéressant du noyau de Poisson : cette fonction des 2 variables ρ et θ est un objet hybride mi-série entière mi-série trigonométrique.

Par convergence normale en θ sur $[0,2\pi]$, on a : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{P}_\rho(\theta)d\theta = 1$

On a aussi :

$$\mathcal{P}_\rho(\theta) = 1 + 2Re[\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\rho}{r})^n e^{-in\theta}] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\rho}{r})^n e^{-in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\rho}{r})^n e^{in\theta}$$

donc :

$$\boxed{\mathcal{P}_\rho(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty}(\frac{\rho}{r})^{|n|}e^{in\theta}}$$

B] formule de Parseval

Soit : $0 < r < R$. Pour θ dans $\mathbb{R}$, les 2 séries numériques $\sum a_n\, r^n\, e^{in\theta}$ et $\sum \overline{a_n}\, r^n\, e^{-in\theta}$ sont absolument convergentes donc leur série produit converge absolument et le théorème de Cauchy assure que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p+q=n} a_p\, r^p \overline{a_q}\, r^q\, e^{i(p-q)\theta} = \sum_{p\geqslant 0} a_p\, r^p\, e^{ip\theta} \sum_{q\geqslant 0} \overline{a_q}\, r^q\, e^{-iq\theta} = \mid f(re^{i\theta}) \mid^2$$

$\mid \sum_{p+q=n} a_p\, r^p\, \overline{a_q}\, r^q\, e^{i(p-q)\theta} \mid$ est majoré indépendemment de θ par $u_n = \sum_{p+q=n} \mid a_p\, r^p \mid\mid \overline{a_q}\, r^q \mid$ et, puisque $\sum u_n$ converge (produit de Cauchy de la série absolument convergente $\sum \mid a_p \mid r^p$ par elle-même), la série de fonctions $\sum_n \sum_{p+q=n} a_p\, r^p\, \overline{a_q}\, r^q\, e^{i(p-q)\theta}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$.

On écrit alors :

$$\int_0^{2\pi} \mid f(re^{i\theta}) \mid^2 d\theta = \sum_{n\geqslant 0} r^n \sum_{p+q=n} a_p\, \overline{a_q}\, 2\pi\, \delta_{p-q,0} = \sum_{n=0}^{\infty} \mid a_n \mid^2\; r^{2n}\, 2\pi$$

ie :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(re^{i\theta}) \mid^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \mid a_n \mid^2 r^{2n} \quad (0 < r < R)}$$

exercice : principe du maximum Si f n´est pas constante, f ne peut admettre un maximum local en 0.

On a :

$$\mid f(0) \mid^2 = \mid a_0 \mid^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(re^{i\theta}) \mid^2 d\theta \quad (0 < r < R)$$

donc : $\mid f(0) \mid^2 \leqslant M_r^2$ où $M_r = Max_{\theta\in[0,2\pi]} \mid f(re^{i\theta}) \mid$.

Si f admet un maximum local en 0, on choisit r dans $]0, R[$
tel que $\mid f(0) \mid^2 = M_r^2$. Ceci impose : $\mid a_n \mid^2\; r^{2n} = 0$ pour $n \geqslant 1$
d´où $a_n = 0$ dès que $n \geqslant 1$.

exercice comportement "litigieux" d´une série entière au bord
On suppose : $R \geqslant 1$
a) Si f est bornée (par M) sur $D(0, 1)$, alors $\sum \mid a_n \mid^2$ converge.
(un théorème de Fejer)
b) Si on suppose de plus que (a_n) est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, alors f est un polynôme.
c) application : on envisage la série entière $\sum \frac{e^{in^\alpha}}{n^\beta} z^n$ avec les conditions $0 < \alpha < 1$; $1 - \alpha < \beta < \frac{1}{2}$. On peut montrer que sa fonction somme f, continue sur le disque ouvert de convergence $D(0, 1)$, est définie sur le disque

fermé $\overline{D(0,1)}$ et possède donc des limites radiales en tout point de S^1.
(cf annexe 1 p.67 et RMS-6 fevrier 1994). Et pourtant, a) assure que f n´est pas bornée sur $\overline{D(0,1)}$; Il en résulte que f n´est pas continue sur $\overline{D(0,1)}$.

Pour a) et b)
Pour $0 < r < 1$ et $N \geqslant 1$,

$$\sum_{k=0}^{N} \mid a_n \mid^2 r^{2n} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(re^{i\theta}) \mid^2 d\theta \leqslant M^2$$

On fait : $r \longrightarrow 1^-$ et on obtient : $\sum_{n=0}^{N} \mid a_n \mid^2 \leqslant M^2$ (pour tout $N \geqslant 1$) donc la série à termes positifs $\sum \mid a_n \mid^2$ converge.
En particulier : $\mid a_n \mid^2 \longrightarrow 0$. Si on suppose que (a_n) est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, nécessairement a_n est nul à partir d´un certain rang.

C] la fonction balayage au créneau

On veut étudier la série trigonométrique $\sum \frac{\sin(nu)}{n}$. Pour u dans $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $G_n(u) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin ku}{k}$ (G_n est appelé noyau de Gibbs)

1) convergence simple sur $\mathbb{R}$

Pour $u \notin 2\pi\mathbb{Z}$, k dans $\mathbb{N}^*$, on pose : $\sigma_k(u) = \sum_{n=0}^{k} \sin(nu)$

- $\sigma_k(u) = Im\,[\sum_{n=0}^{k} e^{inu}] = Im\,[\frac{1-e^{i(k+1)u}}{1-e^{iu}}]$
  donc : $\mid \sigma_k(u) \mid \leqslant \mid \frac{1-e^{i(k+1)u}}{1-e^{iu}} \mid \leqslant \frac{2}{|1-e^{iu}|}$.
  On peut aussi calculer $\sigma_k(u)$:
  $\sigma_k(u) = Im\,[\frac{e^{i(k+1)\frac{u}{2}}}{e^{i\frac{u}{2}}}\ \frac{e^{-i(k+1)\frac{u}{2}} - e^{i(k+1)\frac{u}{2}}}{e^{-i\frac{u}{2}} - e^{i\frac{u}{2}}}\ \frac{2i}{2i}]$
  $= Im\,[e^{ik\frac{u}{2}}\ \frac{\sin((k+1)\frac{u}{2})}{\sin(\frac{u}{2})}]$
  $= \frac{\sin((k+1)\frac{u}{2})\ \sin(k\frac{u}{2})}{\sin(\frac{u}{2})}$
  et on obtient l´inégalité : $\mid \sigma_k(u) \mid \leqslant \frac{1}{|\sin(\frac{u}{2})|}$

- On regarde, pour $p \leqslant q$ dans $\mathbb{N}^*$, la tranche de Cauchy $C_{p,q}(u) = \sum_{n=p}^{q} \frac{\sin(nu)}{n}$. Par transformation d'Abel :

  $C_{p,q}(u) = \frac{\sin(pu)}{p} + \ ...\ + \frac{\sin(qu)}{q}$
  $= \frac{\sigma_p(u)-\sigma_{p-1}(u)}{p} + \frac{\sigma_{p+1}(u)-\sigma_p(u)}{p+1} + ... + \frac{\sigma_{q-1}(u)-\sigma_{q-2}(u)}{q-1} + \frac{\sigma_q(u)-\sigma_{q-1}(u)}{q}$
  $= (\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1})\sigma_p(u) + ... + (\frac{1}{q-1} - \frac{1}{q})\sigma_{q-1}(u) + \frac{1}{q}\sigma_q(u) - \frac{1}{p}\sigma_{p-1}(u)$

  Chaque $\sigma_k(u)$ est borné par $\frac{1}{|\sin(\frac{u}{2})|}$, d´où :

  $$\mid C_{p,q}(u) \mid \leqslant \frac{1}{\mid \sin(\frac{u}{2}) \mid}[(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}) + ... + (\frac{1}{q-1} - \frac{1}{q}) + \frac{1}{q} + \frac{1}{p}] \leqslant \frac{2}{p \mid \sin(\frac{u}{2}) \mid} \quad \clubsuit$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on choisit N dans $\mathbb{N}$ (qui dépend de u) tel que : $\frac{2}{p|\sin(\frac{u}{2})|} \leqslant \varepsilon$ dès que $p \geqslant N$. Pour $p, q \geqslant N$, on a : $| C_{p,q}(u) | \leqslant \varepsilon$.
La série $\sum \frac{\sin(nu)}{n}$ vérifie donc le critère de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet donc converge.

2) expression de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n}$ $\quad (0 < t < 2\pi)$

Pour $u \in \mathbb{R}$, on considère la série entière réelle $\sum \frac{\sin(nu)}{n} x^n$.
$(\forall\, u \in \mathbb{R}) \quad (\forall -1 < x < 1) \quad | \frac{\sin(nu)}{n} x^n | \leqslant \frac{|x|^n}{n}$ donc, par comparaison, $\sum \frac{\sin(nu)}{n} x^n$ converge absolument et on note $S(x,u)$ sa somme.

Pour déterminer une expression simple de $S(x,u)$, *on fixe* x dans $[0,1[$ et on regarde la fonction $S(x,.)$ définie sur $\mathbb{R}$.
La convergence normale en u de $\sum \cos(nu)\, x^n$ assure la dérivabilité de $S(x,.)$ sur $\mathbb{R}$ et pour $u \in \mathbb{R}$, on a :

$(S(x,.))'(u) = \sum_{n=1}^{\infty} cos(nu) x^n = Re(\sum_{n=1}^{\infty} (xe^{iu})^n) = Re(\frac{xe^{iu}}{1-xe^{iu}})$
$= \frac{x\cos(u)(1-x\cos(u)) - x^2\sin^2(u)}{(1-x\cos(u))^2 + (x\sin(u))^2}$
donc : $(S(x,.))'(u) = \frac{1}{1+(\frac{x\sin(u)}{1-x\cos(u)})^2} \; \frac{x\cos u(1-x\cos u) - x^2\sin^2 u}{(1-x\cos u)^2}$
On reconnait la dérivée de $f : u \mapsto \arctan(\frac{x\sin(u)}{1-x\sin(u)})$,
d'où, avec $S(x,0) = f(0) = 0$,

$$\boxed{S(x,u) \;=\; \arctan(\frac{x\sin(u)}{1-x\cos(u)}) \qquad (-1 < x < 1\;;\; u \in \mathbb{R})}$$

En particulier, on a, pour $0 < t < 2\pi$, $S(x,t) \;=\; \arctan(\frac{x\sin(t)}{1-x\cos(t)})$
A t fixé dans $]0, 2\pi[$, puisque la série numérique $\sum \frac{\sin(nt)}{n}$ converge, par le théorème d'Abel radial (cf annexe 1 page 67), on a :

$$lim_{x \to 1^-} S(x,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n}$$

On fait tendre x vers 1 dans l'egalité ci-dessus et on obtient :
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} = \arctan(\frac{\sin(t)}{1-\cos(t)}) = \arctan(\frac{2\sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2})}{2\sin^2(\frac{t}{2})}) = \arctan(\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}))$.
Comme $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} < \frac{\pi}{2}$, on a l'egalité :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} = \frac{\pi - t}{2} \quad (0 < t < 2\pi)}$$

remarque 1
On peut établir de même que pour $0 < t < 2\pi$,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n} = -\ln(2\sin\frac{t}{2})}$$

remarque 2
La méthode utilisée pour calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n}$ rappelle le calcul de l´intégrale oscillante $\int_0^{\infty} \frac{\sin v}{v}\, dv$ par la transformée de Laplace (cf page 34) et illustre les analogies entre la dite tranformée et les séries entières.

3) **pas de convergence uniforme sur** $[0, 2\pi]$

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $x_n = \frac{\pi}{6n}$.
Pour $n > 0$, $\sum_{k=n}^{2n} \frac{\sin kx_n}{k} \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2}\frac{1}{2n} n \geqslant \frac{1}{4}$ donc le critère de Cauchy uniforme n´est pas satisfait et la convergence n´est pas uniforme sur $[0, 2\pi]$.

• Autre vision de l´affaire ; on suppose que (G_n) converge uniformément vers b sur $[0, 2\pi]$. Par inégalités triangulaires,

$$\| b \|_\infty - \| b - G_n \|_\infty \leqslant \| G_n \|_\infty \leqslant \| G_n - b \|_\infty + \| b \|_\infty$$

et par le théorème des gendarmes, $\| G_n \|_\infty \to \| b \|_\infty = \frac{\pi}{2} = 1,57..$
Or : $\| G_n \|_\infty \geqslant G_n(\frac{\pi}{n}) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k\frac{\pi}{n}}{k\frac{\pi}{n}}$ avec, par sommes de Riemann de l´application continûment prolongée $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ sur $[0, \pi]$,

$$lim_{n\to+\infty} G_n(\frac{\pi}{n}) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \underbrace{=}_{admis} 1,85..$$

En passant à la limite dans l´inégalité ci-dessus, il vient : $\frac{\pi}{2} \geqslant 1,85..$
Contradiction.

4) **convergence uniforme compacte sur** $]0, 2\pi[$

Soit : $0 < \delta < \pi$. L´inégalité ♣ donne :

$$\forall u \in [\delta, 2\pi - \delta] \quad \forall p \leqslant q \quad | C_{p,q}(u) | \leqslant \frac{2}{p \mid \sin(\frac{u}{2}) \mid} \leqslant \frac{2}{p \mid \sin(\frac{\delta}{2}) \mid}.$$

Soit : $\varepsilon > 0$. On choisit N dans $\mathbb{N}$ tel que : $p \geqslant N \ \Rightarrow \ \frac{2}{p|\sin(\frac{\delta}{2})|} \leqslant \varepsilon$.
On a alors : $| C_{p,q}(u) | \leqslant \varepsilon$ dès que : $N \leqslant p \leqslant q$ et $u \in [\delta, 2\pi - \delta]$
donc la série de sinus est uniformément de Cauchy sur $[\delta, 2\pi - \delta]$,
donc converge uniformément sur $[\delta, 2\pi - \delta]$.

Ce résultat est obtenu d´une autre façon page 38.

5) $G_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}$ **bornée indépendemment de** n **et** x

On veut majorer $\parallel G_n \parallel_\infty$ par une quantité indépendante de n. G_n étant 2π-périodique, impaire, continue en 0 et en π, il suffit de trouver une constante K telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \forall x\in]0,\pi[\quad \mid G_n(x)\mid \leqslant K$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in]0,\pi[$. On découpe $G_n(x)$ arbitrairement :
pour $1\leqslant m\leqslant n$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin kx=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\sin kx+\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k}\sin kx$.
On gère ensuite la tranche de Cauchy $C_{m,n}=\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k}\sin kx$.
$\mid C_{m,n}\mid \leqslant \frac{1}{m+1}\frac{2}{|\sin\frac{x}{2}|}$ d´après ♣
Par ailleurs, $\mid \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\sin kx \mid \leqslant x\sum_{k=1}^{m}\mid\frac{\sin kx}{kx}\mid \leqslant mx$
Par inégalité triangulaire, $\mid \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin kx\mid\leqslant mx+\frac{2}{(m+1)\sin\frac{x}{2}}$
L´inégalité de Jordan $\sin u\geqslant \frac{2}{\pi}u \quad (u\in[0,\frac{\pi}{2}])$ donne alors

$$\mid \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin kx \mid\leqslant mx+\frac{2}{(m+1)\frac{x}{\pi}}$$

On choisit $m=min\ (E(\frac{\pi}{x}),n)$. (Découpe dépendant de la variable x)
Si $m=E(\frac{\pi}{x})$, $mx\leqslant E(\frac{\pi}{x})x\leqslant\frac{\pi}{x}x\leqslant\pi$ et $(m+1)\frac{x}{\pi}\geqslant(\frac{\pi}{x}-1+1)\frac{x}{\pi}\geqslant 1$
d´où :

$$\mid \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin kx\mid\leqslant \pi+2$$

Si $m=n$, $m=n\leqslant\frac{\pi}{x}$ et $\mid\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\sin kx\mid\leqslant\frac{\pi}{x}x=\pi$

bilan : $\parallel G_n\parallel_\infty\leqslant\pi+2$

6) **pour tester les techniques précédentes :** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\ln n}\sim_{x\to 0}\ln(-\ln x)$

Les vérifications sont laissées au lecteur.

• Pour $x\in]0,2\pi[$ et $N\geqslant 2$, $\mid\sum_{n=2}^{N}\cos nx\mid\leqslant\frac{2}{|1-e^{ix}|}$ et $(\frac{1}{\ln n})_{n\geqslant 2}$ decroit vers 0, donc par transformation d'Abel, $\sum\frac{\cos nx}{n\ln n}$ converge. On note $f(x)$ sa somme.
• La série de fonctions $\sum\frac{\cos nx}{n\ln n}$ converge uniformément sur tout segment du type $[\alpha,2\pi-\alpha]$ (α arbitraire dans $]0,\pi[$), ce qui assure la continuité de f sur $]0,2\pi[$.
• Pour $x\in]0,2\pi[$ et $N=E(\frac{1}{x})$, on écrit (selon une découpe variable) :
$f(x)=\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n\ln n}-\sum_{n=2}^{N}\frac{1-\cos nx}{n\ln n}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\ln n}$.

Chaque tranche de Cauchy $\sum_{n=N+1}^{p}\frac{\cos nx}{n\ln n}$ $(p>N)$ est majorée en valeur absolue par $\frac{4}{|1-e^{ix}|}\frac{1}{(N+1)\ln(N+1)}$ où : $\frac{4}{|1-e^{ix}|}\frac{1}{(N+1)\ln(N+1)}\sim_{x\to 0}\frac{4}{x}\frac{1}{\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}}$ $\sim\frac{-4}{\ln x}$ donc le reste $\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\ln n}$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

On a : $0 \leqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{1-\cos nx}{n \ln n} = 2 \sum_{n=2}^{N} \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{n \ln n} \leqslant 2 \sum_{n=2}^{N} \frac{(\frac{nx}{2})^2}{n \ln n} = \frac{x^2}{2} \sum_{n=2}^{N} \frac{n}{\ln n}$ $\leqslant \frac{x^2}{2} N \frac{N}{\ln N}$. Comme $0 \leqslant x^2 N^2 \leqslant 1$, la somme finie $\sum_{n=2}^{N} \frac{1-\cos nx}{n \ln n}$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

Par comparaison "série-intégrale", $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n \ln n} \sim_{N \to +\infty} \int_2^N \frac{dt}{t \ln t} \sim \ln(\ln N)$ $\sim \ln(-\ln x)$.

En définitive, $f(x) \sim_0 \ln(-\ln x)$

Deuxième partie

Le décor

On veut mettre des hypothèses de régularité sur $f\ :\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ pour représenter f comme somme de série trigonométrique.
Si une série de fonction du type $\sum a_n cos(nx)+b_n sin(nx)$ ou $\sum c_n e^{inx}$ converge simplement en x_0, elle converge aussi pour $x_0+2\pi$ et les sommes sont égales. Il est donc nécessaire de choisir f 2π-périodique.

1 espace de Dirichlet

On appelle Espace de Dirichlet le $\mathbb{C}$-espace vectoriel noté $\mathcal{D}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques, continues par morceaux et vérifiant pour tout réel x, $f(x)=\frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)]$

Pour f dans $\mathcal{D}$, on pose :

$$\parallel f \parallel_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \mid f(x) \mid \quad et \quad \parallel f \parallel_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(t) \mid dt$$

$\parallel\ \parallel_\infty$ et $\parallel\ \parallel_1$ sont des normes sur $\mathcal{D}$.

2 complétude de $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ muni de la norme $\parallel\ \parallel_\infty$

On pose : $E=\{f\in\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{C})\diagup f(0)=f(2\pi)\}$.

On considère l´application δ de $(\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{C}),\parallel\ \parallel_\infty)$ dans $\mathbb{C}$ qui à u associe le complexe $u(2\pi)-u(0)$.
δ est une forme linéaire continue (facile !) de noyau E donc E, sous-espace fermé du Banach $(\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{C}),\parallel\ \parallel_\infty)$, est complet.

L´ application $u\longrightarrow u_{\mid[0,2\pi]}$ de $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dans E est une bijection linéaire isométrique donc $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est un Banach.

3 norme hermitienne sur $\mathcal{D}$

$(f,g)\longmapsto(f\mid g)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\bar{f}g$ est un produit scalaire hermitien sur $\mathcal{D}$ et on note $\parallel\ \parallel_2$ la norme associée.
Pour k dans $\mathbb{Z}$, on note e_k l´application $x\mapsto e^{ikx}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
La famille (e_k) est orthonormale pour $(\mid)$, et donc libre dans $\mathcal{D}$.

- A-t-on : (e_k) base de $\mathcal{D}$?
  Non ! Sinon tout élément de $\mathcal{D}$, combinaison linéaire finie des e_k, est continue. Penser à une fonction créneau.

- A-t-on : (e_k) base de $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$?
  Non ! Sinon tout élément de $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Penser à une fonction dent de scie continue.

exercice : la boule unité fermée de $(\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\ \ \|_2)$ n´est pas compacte. On prouve le résultat sans évoquer la dimension de $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Pour $p \neq q$ dans $\mathbb{Z}$, pour x dans $\mathbb{R}$, $\mid e_p(x) - e_q(x) \mid^2 = 2 - 2Re(e^{i(q-p)x})$. On a alors : $\| e_p - e_q \|_2^2 = 2$. Si la boule unité fermée de $(\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\ \ \|_2)$ est compacte, la suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d´adhérence donc une sous suite de Cauchy. Ce qui n´est pas.

On veut à présent savoir si $(\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\ \ \|_p)$ $(p = 1, 2)$ est complet.
Ce problème revient à étudier l´equivalence des normes $\|\ \ \|_p$ et $\|\ \ \|_\infty$.
En effet, si $\|\ \ \|_p$ et $\|\ \ \|_\infty$ sont équivalentes, alors toute suite de Cauchy pour $\|\ \ \|_p$ l´est aussi pour $\|\ \ \|_\infty$, converge donc dans le Banach $(\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\ \ \|_\infty)$ et par inégalité des normes, converge vers la même limite pour $\|\ \ \|_p$. Réciproquement, si $(\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\ \ \|_p)$ est complet, l´application $id : (\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\ \ \|_\infty) \to (\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\ \ \|_p)$ est une bijection linéaire continue entre espaces de Banach et, d´après le théorème de l´application ouverte (cf annexe 2 page 71), sa réciproque est aussi continue, ce qui donne alors l´equivalence de normes.

exercice : $(\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\ \ \|_p)$ $(p = 1, 2)$ n´est pas complet. Le but est d´exhiber une suite de Cauchy de $(\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\ \ \|_p)$ qui n´y converge pas. Pour n dans $\mathbb{N}$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par :

1. f_n est 2π-périodique.
2. f_n est paire.
3. $f_n(x) = n$ si $0 \leqslant x \leqslant (\frac{1}{n})^{p+1}$.
4. $f_n(x) = (\frac{1}{x})^{\frac{1}{p+1}}$ si $(\frac{1}{n})^{p+1} \leqslant x \leqslant \pi$

- (f_n) est de Cauchy dans $(\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\ \ \|_p)$.

  Pour $n < m$ dans $\mathbb{N}$,
  $\| f_m - f_n \|_p^p = \frac{1}{2\pi} 2 \int_0^{(\frac{1}{n})^{p+1}} \mid f_m(t) - f_n(t) \mid^p dt$
  $\leqslant \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_{\to 0}^{(\frac{1}{n})^{p+1}} [(\frac{1}{t})^{\frac{1}{p+1}} - n]^p dt}_{convergente\ en\ 0}$
  $\leqslant \frac{1}{\pi} \int_{\to 0}^{(\frac{1}{n})^{p+1}} t^{\frac{-p}{p+1}} dt$
  $\leqslant \frac{p+1}{n\pi}$.

  D´où le résultat.

- (f_n) n´est pas convergente dans $(\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\ \ \|_p)$.

  Si (f_n) converge vers f dans $(\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\ \ \|_p)$,

on a : $\forall \alpha > 0 \ \int_{\alpha}^{\pi} \mid f_n(t) - f(t) \mid^p \ dt \to 0.$ $\quad (\checkmark)$
Pour n tel que $(\frac{1}{n})^{p+1} < \alpha$, $f_n(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{p+1}}}$ sur $[\alpha, \pi]$
donc, avec $(\checkmark)$, $\int_{\alpha}^{\pi} \mid \frac{1}{t^{\frac{1}{p+1}}} - f(t) \mid^p dt = 0.$
Par continuité et positivité de l´intégrande,
on obtient : $f \equiv \frac{1}{x^{\frac{1}{p+1}}}$ sur $[\alpha, \pi]$ et ce pour tout $\alpha > 0$.
f coincide donc ~~avec~~ $x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{1}{p+1}}}$ sur $]0, \pi]$.
Impossible car $x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{1}{p+1}}}$ n´est pas continue en 0.

On a même vérifié que (f_n) ne converge pas dans $(\mathcal{D}, \| \quad \|_p)$, ce qui assure que $(\mathcal{D}, \| \quad \|_p)$ n´est pas complet.

exercice : $\| \quad \|_p \quad (p = 1, 2)$ n´est pas équivalente à $\| \quad \|_\infty$ dans $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Résultat acquis avec l´exercice précédent et la complétude de $(\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \| \quad \|_\infty)$. Voici toutefois une preuve directe.

On raisonne par l´absurde.
On suppose : $\exists C > 0 \, \forall f \in \mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \ \| f \|_p \geqslant C \ \| f \|_\infty$.
Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par :

1. f_n est 2π-périodique.
2. f_n est paire.
3. la restriction de f_n à $[0, \frac{1}{n}]$ est l´application affine $(0 \mapsto 1, \ \frac{1}{n} \mapsto 0)$.
4. $f_n(x) = 0$ si $\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \pi$

- On a : $\| f_n \|_\infty = 1$
- On a : $\| f_n \|_p^p \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mid f_n(t) \mid dt$ car f_n est à valeurs dans $[0, 1]$
  donc : $\| f_n \|_p^p \leqslant \frac{1}{2\pi} 2 \frac{1}{2n}$
  donc : $\| f_n \|_p \leqslant (\frac{1}{2\pi n})^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$
- L'hypothèse de départ donne : $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \geqslant C$. Absurde !

exercice : $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est dense dans $(\mathcal{D}, \| \quad \|_2)$

4 sous-espace $\mathcal{T}$ des polynômes trigonométriques

On note $\mathcal{T}$ le sous-espace de $\mathcal{D}$ engendré par la famille orthonormale $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et, pour p dans $\mathbb{N}$, on pose : $\mathcal{T}_p = Vect(e_k, \ -p \leqslant k \leqslant p)$.

$\mathcal{T}$ fermé dans $(\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}),\|\quad\|_\infty)$?

on suppose que $\mathcal{T}$ est fermé dans le Banach $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. $\mathcal{T}$ est donc complet et vérifie la propriété de Baire (cf annexe 2 page 71) ; chaque S.e.v $\mathcal{T}_p$ étant fermé (S.e.v de dimension finie) et d'intérieur vide dans $\mathcal{T}$ (sinon $\mathcal{T}_p$ contient une boule ouverte, et donc $\mathcal{T}$ par invariance par homothétie), la réunion $\cup_{p\in\mathbb{N}}\mathcal{T}_p$ est d'intérieur vide dans $\mathcal{T}$. Absurde car $\cup_{p\in\mathbb{N}}\mathcal{T}_p=\mathcal{T}$

coefficients de Fourier

Dans le préhilbertien complexe $\mathcal{T}$, tout élément x s´ecrit $\sum_{k=p}^{q} x_k e_k$ $(p,q\in\mathbb{Z})$ avec $x_k=(e_k\mid x)$. Si y dans $\mathcal{T}$ s´ecrit $\sum_{k=p}^{q} y_k e_k$, on a : $(x\mid y)=\sum_{k=p}^{q}\overline{x_k}\,y_k$. Ces relations simples dans un préhilbertien muni d´une base orthonormée justifient, pour une tentative de généralisation, l´intérêt d´introduire les coefficients $(e_k\mid f)$ lorsque f appartient à $\mathcal{D}$.

définition : pour f dans $\mathcal{D}$ et n dans $\mathbb{Z}$, on pose :

$$\boxed{c_n(f)=(e_n\mid f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)e^{-inu}du}$$

$c_n(f)$ est appelé coefficient exponentiel de f et la série de fonction $\sum c_n(f)e_n$ série de Fourier complexe de f.

remarque 1 : $\sum c_n(f)e_n$ est dite convergente (en un sens à préciser) quand la suite des sommes partielles centrées $S_p(f)=\sum_{k=-p}^{p} c_k(f)e_k$ converge en ce sens.

remarque 2 : pour t dans $\mathbb{R}$ et pour n dans $\mathbb{N}^*$, on peut écrire :

$$c_n(f)e_n(t)+c_{-n}(f)e_{-n}(t)=a_n(f)\cos(nt)+b_n(f)\sin(nt)$$

où on a posé :

$$a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\cos(nu)du\ ;\ b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\sin(nu)du$$

On pose aussi : $a_0(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u)du$.

Lorsque f est à valeurs réelles, les $a_n(f)$ $(n\geqslant 0)$ et $b_n(f)$ $(n\geqslant 1)$ sont réels. On les appelle coefficients de Fourier réels de f et la série de fonctions $\frac{a_0}{2}+\sum a_n(f)\cos(n.)+b_n(f)\sin(n.)$ est appelée série de Fourier réelle de f. Le terme $a_1\cos t+b_1\sin t$, de même période que le signal f, porte le nom de terme fondamental. Le terme $a_n\cos nt+b_n\sin nt\quad n\in\mathbb{N}^*$, de période $\frac{2\pi}{n}$, est appelé harmonique de rang n.

premier exemple :
si $\frac{a_0}{2}+\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n\cos nx+b_n\sin nx$ est une série trigonométrique uniformément convergente, de somme f, alors nécessairement f est dans $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, et sa série de Fourier coincide avec $\frac{a_0}{2}+\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n\cos nx+b_n\sin nx$.

exercice a) Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad S_p(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(.-t) \underbrace{\sum_{k=-p}^{p} e^{ikt}}_{noyau\,de\,Dirichlet\,D_p} dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sum_{k=-p}^{p} e^{ik(.-t)}dt$$

b) Montrer que D_p est pair, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\boxed{\forall t \in]0,\pi] \quad D_p(t) = \frac{\sin(p+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} \qquad et\ D_p(0) = 2p+1}$$

c) Vérifier que : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_p(t)dt = 1$

5 unicité des développements...première...action

Soit f non nulle dans $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Alors les coefficients de Fourier de f ne sont pas tous nuls.

preuve : on raisonne par l´absurde en supposant que : $\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f) = 0$

Quitte à remplacer f par $-f$, on choisit $c \in \mathbb{R}$ tel que : $f(c) > 0$. On vérifie sans peine, que pour $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f(.-c)) = e^{-inc}c_n(f)$ (cf infra). En remplaçant au besoin f par $f(.-c)$, on fait : $c = 0$. Par continuité de f en 0, on choisit $0 < h < \frac{\pi}{2}$; $a > 0$ tels que : $f \geqslant a > 0$ sur $]-h,h[$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose : $v(x) = 1 + \cos x - \cos h$; $P_n(x) = (v(x))^n$.

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)P_n(x)dx = \int_{-h}^{h} \quad + \int_{[-\pi,\pi]_{\setminus]-h,h[}}$
$\geqslant 2a\int_0^h P_n(x)dx - \parallel f \parallel_\infty \int_{[-\pi,\pi]_{\setminus]-h,h[}} \mid P_n \mid$

v est impaire, décroit sur $[0,\pi]$, est bornée par 1 sur $[h,\pi]$

De là : $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)P_n(x)dx \geqslant 2a\int_0^h P_n(x)dx - 2\pi \parallel f \parallel_\infty$

La fonction cosinus est concave sur $[0,h] \qquad (0 < h < \frac{\pi}{2})$
donc, pour $x \in [0,h]$, $\cos x \geqslant 1 - \frac{1-\cos h}{h}x \geqslant 0$
d´où :

$$\int_0^h P_n(x)dx \geqslant \int_0^h (2-\cos h - \frac{1-\cos h}{h}x)^n dx = \frac{h}{1-\cos h}\frac{1}{n+1}[(2-\cos h)^{n+1}-1]$$

Il vient : $0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)P_n(x)dx \geqslant \frac{2ah}{1-\cos h}\frac{1}{n+1}[(2-\cos h)^{n+1}-1] - 2\pi \parallel f \parallel_\infty$
Or le membre de droite de l´inégalité tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
Contradiction !

6 régularité des éléments de $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

propriété : toute fonction f continue 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est uniformément continue.

preuve : la justification repose sur le théorème de Heine et sur une technique de débordement.

- f est uniformément continue sur le segment $[0,4\pi]$ (Heine)
- Si 2 réels $u, v \quad (u < v)$ sont 2π-proches, $u - 2\pi E(\frac{u}{2\pi})$ et $v - 2\pi E(\frac{v}{2\pi})$ sont simultanément dans $[0,4\pi]$.
- Soit $\varepsilon > 0$. On choisit α dans $]0,2\pi]$ tel que :
  $\forall x, y \in [0,4\pi] \quad |\, y - x \,| \leqslant \alpha \Rightarrow |\, f(y) - f(x) \,| \leqslant \varepsilon$.
  Si 2 réels u et v $(u < v)$ sont α-proches, ils sont 2π-proches et leurs translatés $x = u - 2\pi E(\frac{u}{2\pi})$, $y = v - 2\pi E(\frac{v}{2\pi})$ sont α-proches dans $[0,4\pi]$ d´où, par périodicité de f, $|\, f(v) - f(u) \,| = |\, f(y) - f(x) \,| \leqslant \varepsilon$

exercice : compacité de $K_f = \{f(.+\tau) \backslash \tau \in \mathbb{R}\}$ Soit : $\Psi : \tau \longmapsto f(.+\tau)$ de $[0,2\pi]$ dans K_f.

- Ψ est continue sur $[0,2\pi]$.
  Soit τ_0 dans $[0,2\pi]$ et $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels de $[0,2\pi]$ qui converge vers τ_0. Soit : $\varepsilon > 0$. Par uniforme continuité de f sur $\mathbb{R}$, on choisit $\alpha > 0$ tel que : $\forall u, v \in \mathbb{R} \quad |\, u - v \,| < \alpha \Rightarrow |\, f(u) - f(v) \,| \leqslant \varepsilon$.
  On choisit N dans $\mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N \quad |\, \tau_n - \tau_0 \,| < \alpha$.
  $\forall n \geqslant N \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |\, f(x + \tau_n) - f(x + \tau_0) \,| \leqslant \varepsilon$
  d´où $\quad \forall n \geqslant N \quad \|\, f(. + \tau_n) - f(. + \tau_0) \,\|_\infty \leqslant \varepsilon$ .cqfd.
- Ψ est surjective.
  Soit : $\tilde{f} = f(. + \tau) \in K_f$. On pose : $\tilde{\tau} = \tau - 2\pi E(\frac{\tau}{2\pi})$. On a $\tilde{f} = \Psi(\tilde{\tau})$ avec $\tilde{\tau} \in [0,2\pi]$.
- A-t-on Ψ injective ?
  NON ! $\Psi(0) = \Psi(2\pi)$! Il ne faut pas rêver : si tel était le cas, K_f serait homéomorphe à $[0,2\pi]$.

exercice : convergence simple et uniforme de $(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(. + \frac{2k\pi}{n}))$ **pour** $f \in \mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

- Soit : $x \in \mathbb{R}$. $\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x + \frac{2k\pi}{n})$ est la somme de Riemann de f associée à la subdivision $(x, x+\frac{2\pi}{n}, ..., x+\frac{2(n-1)\pi}{n}, x+2\pi)$ et au pointage $((x, x+\frac{2\pi}{n}, ..., x+\frac{2(n-1)\pi}{n})$. Comme f est continue, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x + \frac{2k\pi}{n})$ tend vers $\frac{1}{2\pi}\int_x^{x+2\pi} f(t)dt = c_0(f)e_0(x)$ quand $n \to +\infty$.

- Soit : $\varepsilon > 0$.
  Pour $x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\Delta_n(x) = \mid \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x+\frac{2k\pi}{n}) - c_0(f)e_0(x) \mid$$

  $\Delta_n(x) = \mid \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x+\frac{2k\pi}{n}) - \frac{1}{2\pi}\int_x^{x+2\pi} f(t)dt \mid$

  On compare facilement des objets de même allure d´où l´idée d´écrire :
  $\int_x^{x+2\pi} f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x+\frac{2k\pi}{n}}^{x+\frac{2(k+1)\pi}{n}} f(t)dt.$
  Il vient :
  $\Delta_n(x) \leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \mid \frac{2\pi}{n} f(x+\frac{2k\pi}{n}) - \int_{x+\frac{2k\pi}{n}}^{x+\frac{2(k+1)\pi}{n}} f(t)dt \mid$
  $\leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \mid \int_{x+\frac{2k\pi}{n}}^{x+\frac{2(k+1)\pi}{n}} (f(x+\frac{2k\pi}{n}) - f(t))dt \mid$
  $\leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x+\frac{2k\pi}{n}}^{x+\frac{2(k+1)\pi}{n}} \mid f(x+\frac{2k\pi}{n}) - f(t) \mid dt$

  Soit $\alpha > 0$ tel que $\forall u, v \in \mathbb{R} \quad \mid u - v \mid \leqslant \alpha \Longrightarrow \mid f(u) - f(v) \mid \leqslant \varepsilon$
  On choisit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_0 \quad \frac{2\pi}{n} \leqslant \alpha$
  Pour $n \geqslant N_0$, $\mid f(x+\frac{2k\pi}{n}) - f(t) \mid \leqslant \varepsilon$ dès que $t \in [x+\frac{2k\pi}{n}, x+\frac{2(k+1)\pi}{n}]$.
  Pour $x \in \mathbb{R}$, $\Delta_n(x) \leqslant \frac{1}{2\pi}\ n\ \frac{2\pi}{n}\ \varepsilon \leqslant \varepsilon$. D´où le résultat.

exercice : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad S_n(f)(x) - f(x) = \circ(\ln n) \quad (f \in \mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}))}$

Quitte à remplacer f par $f - f(x)$, on peut supposer : $f(x) = 0$.

$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^0 f(x-t)D_n(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(x-t)D_n(t)dt$
$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(u)D_n(x-u)du + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(x-t)D_n(t)dt \quad$ *(changement de variable)*
$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(u)D_n(u-x)du + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(x-t)D_n(t)dt \quad$ *(D_n pair)*
$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(x+t)D_n(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(x-t)D_n(t)dt \quad$ *(changement de variable)*

donc :

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t)]D_n(t)dt$$

La seule difficulté dans le contrôle de cette intégrale se situe au voisinage de 0. Y cohabitent en effet le noyau D_n proche de $2n+1$ et le crochet uniformément (par rapport à t) proche de $f(x) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $\delta > 0$ tel que :

$$\forall u, v \in \mathbb{R} \quad \mid u - v \mid \leqslant \delta \Rightarrow \mid f(u) - f(v) \mid \leqslant \varepsilon$$

$$| S_n(f)(x) | \leqslant \tfrac{2\varepsilon}{2\pi}\int_0^\delta | D_n(t) | \, dt + \underbrace{\frac{2 \| f \|_\infty}{2\pi}\int_\delta^\pi \frac{1}{| \sin \frac{t}{2} |}dt}_{constante\, K}$$

$\leqslant \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^\pi \frac{|\sin (n+\frac{1}{2})t|}{\sin \frac{t}{2}}dt + K$
$\leqslant \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^\pi \pi\frac{|\sin (n+\frac{1}{2})t|}{t}dt + K \qquad (\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x)$
$\leqslant \varepsilon \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin u|}{u}du + K$

Or : $\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin u|}{u}du \leqslant \int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin u|}{u}du$

$\leqslant \int_0^\pi \frac{|\sin u|}{u}du + \sum_{k=1}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin u|}{u}du$
$\leqslant \int_0^\pi \frac{|\sin u|}{u}du + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} | \sin u | \, du$
$\leqslant \int_0^\pi \frac{|\sin u|}{u}du + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

d´où : $| S_n(f)(x) | \leqslant \varepsilon \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \varepsilon \int_0^\pi \frac{|\sin u|}{u}du + K$

D´où le résultat.

application : densité de $\mathcal{C}^1_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dans $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ Pour f dans $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, considérer la suite de fonctions $f_n : x \mapsto n\int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt$ et montrer grâce à l´uniforme continuité de f que (f_n) converge uniformément vers f.

Au passage, on obtient "en cascade" la densité de $\mathcal{C}^k_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dans $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ pour $1 \leqslant k < +\infty$.

On peut aussi noter que ce résultat n´est pas étranger à la convolution ;
si on pose, pour $u \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\rho_n(u) = n\,\chi_{[0,1]}(nu)$, f_n est la convolée de f par ρ_n. Il est assez rare pour noter que f n´est que continue et que le noyau ρ_n n´est même pas continu alors que $f_n = f * \rho_n$ est C^1 sur $\mathbb{R}$.

7 Densité de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

• 1•
énoncé : la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ a, en plus d´être orthonormale dans $(\mathcal{D}, |)$, une autre qualité remarquable : le sous-espace $\mathcal{T}$ (des polynômes trigonométriques) qu´elle engendre est dense dans $(\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \| \quad \|_\infty)$.

remarque : les inégalités $\| \quad \|_1 \leqslant \| \quad \|_2 \leqslant \| \quad \|_\infty$ donnent la densité de $\mathcal{T}$ dans $(\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \| \quad \|_i)$. Enfin, la densité de $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dans $(\mathcal{D}, \| \quad \|_2)$ assure la densité de $\mathcal{T}$ dans $(\mathcal{D}, \| \quad \|_2)$.

preuve : voici une démonstration originale (?) du théorème "trigonométrique" d´approximation de Weierstrass. Elle repose sur la densité de

$\mathcal{C}^1_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dans $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et sur les propriétés des G_n (noyau de Gibbs)

L´idée est de montrer qu´une fonction g de $\mathcal{C}^1_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est limite uniforme des sommes partielles de sa série de Fourier (cas particulier du théorème de convergence uniforme de Dirichlet), et donc limite uniforme de polynômes trigonométriques. Maintenant une fonction f de $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ peut être approchée uniformément par un élément g de $\mathcal{C}^1_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ d´où, en 2 temps, la densité de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Quitte à remplacer g par $g - c_0(g)$, on peut supposer $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g = 0$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\Delta_n(x) = S_n(g)(x) - g(x)$.

• on écrit : $S_n(g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[1 + 2\sum_{k=1}^n \cos(k(x-t))]g(t)dt$
$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[2\sum_{k=1}^n \cos(k(x-t))]g(t)dt \qquad$ car $c_0(g) = 0$
Les fonctions g et $t \mapsto 2\sum_{k=1}^n \cos(k(x-t))$ sont de classe C^1, donc par intégration par parties :

$$S_n(g)(x) = \frac{1}{2\pi}\{\underbrace{[-\sum_{k=1}^{n}\frac{2\sin(k(x-t))}{k}g(t)]_0^{2\pi}}_{=0\ par périodicité} + \int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^n \tfrac{2}{k}\sin(k(x-t))\ g'(t)dt\,\}$$

$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^n \frac{2}{k}\sin kt\ g'(x-t)dt$
$= 2\ g' * G_n(x)$

• On rappelle que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall t \in \mathbb{R}\quad |\ G_n(t)\ | \leqslant M$ avec $M = \pi + 2$ et on remarque que la fonction g', élément de $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, est bornée.

Pour $0 < \delta < \pi$,

$$S_n(g)(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g'(x-t)G_n(t)dt = \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} + \frac{1}{\pi}\int_{2\pi-\delta}^{2\pi}}_{borné\ par\ 2\frac{\delta}{\pi}\|g'\|_\infty M} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}}_{noté\ r_n(x)}$$

$g' \in \mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ étant bornée et (G_n) convergeant uniformément sur $[\delta, 2\pi-\delta]$ vers $b : t \mapsto \frac{\pi-t}{2}$, la suite de fonctions $r_n\ :\ x \mapsto \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} g'(x-t)G_n(t)dt$ converge simplement vers $r\ :\ x \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} g'(x-t)(\pi-t)dt$.

La convergence de r_n vers r est même uniforme ; en effet, $\forall x \in [\delta, 2\pi-\delta]$
$\forall n \in \mathbb{N}^*\quad |\ r_n(x) - r(x)\ | \leqslant \frac{1}{\pi} \parallel g' \parallel_\infty (2\pi - 2\delta)\sup_{t\in[\delta,2\pi-\delta]} |\ G_n(t) - b(t)\ |$
et le membre de droite de l´inégalité, via la convergence uniforme de (G_n) vers b sur $[\delta, 2\pi-\delta]$, tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ indépendemment de la variable x.

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $|\ \Delta_n(x)\ | \leqslant \frac{2M\,\|g'\|_\infty}{\pi}\delta + |\ \underbrace{r_n(x) - g(x)}_{\delta_n(x)}\ |$

$|\ \delta_n(x)\ | \leqslant |\ r_n(x) - r(x)\ | + |\ r(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g'(x-t)(\pi-t)dt\ | +$

$| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g'(x-t)(\pi - t)dt - g(x) |$
Le dernier terme de la somme vaut : $| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-g'(x-t)]\, t\, dt - g(x) |$ car avec la 2π-périodicité et le caractère C^1 de g, $\int_0^{2\pi} g'(x-t)\pi\, dt = 0$. Par intégration par parties, $\int_0^{2\pi} [-g'(x-t)]\, t\, dt = 2\pi g(x)$ donc ce dernier terme est nul.
Le terme médian est borné par $\frac{\delta}{2\pi} \parallel g' \parallel_\infty \pi + \frac{[2\pi-(2\pi-\delta)]}{2\pi} \parallel g' \parallel_\infty \pi$ ie $\parallel g' \parallel_\infty \delta$

• Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N_0 \Rightarrow | r_n(x) - r(x) | \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Avec δ choisi dans $]0, \pi[$ tel que $(1 + \frac{2M}{\pi}) \parallel g' \parallel_\infty \delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \geqslant N_0 \ | \Delta_n(x) | \leqslant \varepsilon$$

exercice Unicité des développements en série de Fourier dans $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Si un élément h de $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ a tous ses coefficients de Fourier nuls, alors h est l´application nulle. Ce résultat est le point de vue trigonométrique de la version élémentaire (version "continue") du théorème des moments. Il signifie que l´orthogonal de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est trivial.

preuve : on envisage une suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers $\bar{h} \in \mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. h est bornée donc (hP_k) converge uniformément sur $\mathbb{R}$, vers $| h |^2$.
D´où $lim_{k\to+\infty} \int_0^{2\pi} hP_k = \int_0^{2\pi} | h |^2$.
Or : $\forall k \in \mathbb{N} \quad \int_0^{2\pi} hP_k = 0$ car $\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(h) = (h \mid e_n) = 0$.
Il vient $\int_0^{2\pi} | h |^2 = 0$ et par continuité et positivité de $| h |^2$, $h = 0$.

application : pour $f \in \mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, si $\sum | c_n(f) |$ converge, alors la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

La convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions continues $\sum c_n e_n$ est assurée par convergence normale. Soit g sa somme, élément de $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Dans le $c_n(g)$ $(n \in \mathbb{Z})$, on peut intervertir les signes $\int$ et $\sum$ et obtenir : $\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(g) = c_n(f)$.
$h = f - g$ appartient à $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et a ses coefficients de Fourier nuls donc h est l´application nulle. cqfd.

exercice Pour $f \in \mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$. montrer $(P(f))$: $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $I(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)dt$.
Autrement dit, la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne de Césaro vers la valeur moyenne de f.

• $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n(e_0) = 1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e_0$

• $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n(e_1) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik} = \frac{1}{n}\frac{1-e^{in}}{1-e^{i1}}$ donc : $\mid u_n(e_1) \mid \leqslant \frac{2}{n\,|1-e^{i1}|}$
donc $(u_n(e_1))$ converge vers $0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_1$.

Lorsqu´on enroule $\mathbb{N}$ autour de S^1, la répartition obtenue sur S^1 montre une certaine symétrie par rapport à l´origine.
Y-a-t-il des zones de concentration ?

• On remplace e_1 par $e_p \quad (p \in \mathbb{Z}^*)$ et on enroule $p\mathbb{N}$ autour de S^1.
Ces changements d´echelle visent à faire exploser les zones de concentration éventuelles.
$\forall p \in \mathbb{Z}^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mid u_n(e_p) \mid = \frac{1}{n} \mid \frac{1-e^{ipn}}{1-e^{ip}} \mid \leqslant \frac{1}{n}\frac{2}{|1-e^{ip}|}$
donc $(u_n(e_p))$ converge vers $0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_p$

Les changements d´echelle ne perturbent pas la symétrie par rapport à 0. D´où une certaine uniformité de la répartition. Ce phénomène n´est pas "trop" surprenant si on a en tête que $\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$ est proche du sous-groupe additif $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$, dense dans $\mathbb{R}$.

• Par linéarité de $u_n(.) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ et de $I(.)$, $(P(.))$ est stable par combinaisons linéaires donc valable pour les polynômes de $\mathcal{T}$.

• stabilité de (P(.)) par convergence uniforme.
Soit $f \in \mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On considère une suite (P_n) de polynômes trigonométriques qui convergent uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$u_n(f) - I(f) = u_n(f - P_k) + u_n(P_k) - I(P_k) + I(P_k - f)$$

donc : $\mid u_n(f) - I(f) \mid \leqslant 2 \;\; \| f - P_k \|_\infty + \mid u_n(P_k) - I(P_k) \mid$
par continuité des formes linéaires u_n et I pour la norme $\| \quad \|_\infty$

Soit $\varepsilon > 0$ et $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tels que : $\| f - P_k \|_\infty \leqslant \varepsilon$
On a alors : $\mid u_n(f) - I(f) \mid \leqslant M_n = 2\varepsilon + \mid u_n(P_{k_\varepsilon}) - I(P_{k_\varepsilon}) \mid$
ε et k_ε étant fixés, on a : $M_n \to 2\varepsilon$.
On choisit alors N_0 dans $\mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N_0 \quad M_n \leqslant 3\varepsilon$.
D´où le résultat.

Autre point de vue :
on considère le sous-espace de $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$: $\Omega = \{f \in \mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \backslash (P(f))\ \textit{est vraie}\}$
et on prouve par densité-fermeture que Ω est $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

application : $\boxed{\sum_{k=1}^{N} \frac{\mid \sin k \mid}{k} \sim \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} \sim \frac{2}{\pi}\ln N \qquad (en\ +\infty)}$

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on évalue

$$\Delta_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{| \sin k |}{k} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$$

Pour $1 \leqslant k \leqslant N$, on pose : $u_k = | \sin k | - \frac{2}{\pi}$ et $\sigma_k = \sum_{p=1}^{k} u_p$

- $\Delta_N = \frac{\sigma_N}{N} - \frac{\sigma_1}{2} + \sum_{k=2}^{N-1} \frac{\sigma_k}{k(k+1)}$ par transformation d´Abel

- Pour $1 \leqslant k \leqslant N$, $\sigma_k = k\,[\frac{1}{k} \sum_{p=1}^{k} | \sin p | - \frac{2}{\pi}]$ donc, d´après l´exercice (avec $f : t \mapsto | \sin t |$), σ_k est négligeable devant k.

  1. $\frac{\sigma_N}{N} \to 0 \qquad (N \to +\infty)$
  2. $\frac{\sigma_k}{k(k+1)} = \circ(\frac{1}{k})$
     La série harmonique est une série à termes positifs divergente donc par sommation de la relation $\circ$, $\sum_{k=2}^{N-1} \frac{\sigma_k}{k(k+1)} = \circ(\ln N)$

On a prouvé que Δ_N est négligeable devant $\ln N$.
D´où le résultat.

remarque : on a montré que la suite $\alpha_n = n(2\pi)$, dense dans $[0, 2\pi]$, vérifie :

$$\forall f \in \mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k) \longrightarrow_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)dt.$$

Ce type de propriété est lié à la répartition des termes de la suite dans l´intervalle mais n´est pas une conséquence de la densité. Pour s´en convaincre, on considère la suite $\beta_n = | \sin n |$, dense dans $[0, 1]$. Si f est la fonction 1-périodique définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x(1 - x)$, on a : $\frac{1}{1} \int_0^1 f = \frac{1}{6}$ et pourtant, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\beta_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} | \sin k | - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos 2k$ tend vers $\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \neq \frac{1}{6}$.

exercice Soit : $f \in \mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On rappelle : $K_f = \{f(. + \tau) \setminus \tau \in \mathbb{R}\}$. On suppose : $\forall p \in \mathbb{Z} \quad c_p(f) \neq 0$. Alors $H_f = Vect(K_f)$ est dense dans $(\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \| \quad \|_\infty)$.

Il suffit de vérifier que : $\forall p \in \mathbb{Z} \quad e_p \in \bar{H}_f$.
On pose : $\varphi = f e_{-p}$. D´après l´exercice page 19, la suite de fonctions $(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(. + \frac{2k\pi}{n}) = [\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-ip\frac{2k\pi}{n}} f(. + \frac{2k\pi}{n})] e_{-p})$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $c_0(\varphi) e_0 = c_p(f) e_0$ ie :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall n \geqslant N\ \forall x \in \mathbb{R} \ \ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-ip\frac{2k\pi}{n}} f(x + \frac{2k\pi}{n}) e_{-p}(x) - c_p(f) e_0(x) \right| \leqslant \varepsilon$$

Or :
$| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-ip\frac{2k\pi}{n}} f(x+\frac{2k\pi}{n})e_{-p}(x) - c_p(f)e_0(x) |$
$= \underbrace{| e_{-p}(x) |}_{=1} | \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-ip\frac{2k\pi}{n}} f(x+\frac{2k\pi}{n}) - c_p(f)e_p(x) |$
On a alors : $c_p(f)e_p \in \bar{H}_f$. Puisque $c_p(f) \neq 0$ et $\bar{H}_f$ S.e.v de $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on a enfin : $e_p \in \bar{H}_f$.

•2• théorème de Fejer :
pour f dans $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, la suite de fonctions $\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

outils pour la preuve ; exercice a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \sigma_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(.-t) \underbrace{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=-k}^{k} e^{ilt}}_{noyau\,de\,Fejer\,F_n} dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)F_n(.-t)dt$$

On écrit : $\sigma_n(f) = f * F_n$
b) Montrer que $F_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k$ est pair, 2π-périodique, positif et continu sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\boxed{\forall t \in]0,\pi] \quad F_n(t) = \frac{1}{n+1}\frac{\sin^2(n+1)\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}} \quad et\ F_n(0) = n+1}$$

c) Vérifier que : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_n(t)dt = 1$
d) Vérifier que : $F_n = \sum_{k=-n}^{n}(1-\frac{|k|}{n+1})e_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=-n}^{n}(n+1- | k |)e_k$
puis que $F_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}D_n^2$
e) Noyau de Fejer au service du noyau de Gibbs
Pour $x \in [0,1[$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose de façon licite : $S(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n}x^n$
et on rappelle que : $S(x,t) = \arctan(\frac{x\sin t}{1-x\cos t})$
- Montrer : $S(x,.) * F_n(t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kt}{k}x^k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin kt\ x^k$
- En déduire : $| \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kt}{k}x^k | \leqslant \frac{\pi}{2}+1$
- conclure que $(\| G_n \|_\infty)$ est bornée.

La preuve du théorème de Fejer est donnée en annexe 3 page 72.

application 1 On retrouve l´unicité des développements en séries de Fourier dans $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Si f, g appartiennent à $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et si $\forall k \in \mathbb{Z} \quad c_k(f) = c_k(g)$,
alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n(f) = \sigma_n(g)$ et en passant à la limite dans

$$\| f-g \|_\infty \leqslant \| f-\sigma_n(f) \|_\infty + \| \sigma_n(g) - g \|_\infty,$$

on obtient $\| f-g \|_\infty \leqslant 0$ ie $f = g$.

application 2 Pour $f \in \mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, si $(S_n(f)(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $S_n(f)(x_0) \longrightarrow f(x_0)$.

utiliser le fait que la convergence "usuelle" d´une suite numérique implique la convergence en moyenne vers la même limite, puis le théorème de Fejer.

application 3 Soit B la partie de $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ formée des fonctions dont tous les coefficients de Fourier complexes d´indices strictement négatifs sont nuls.
• B n´est pas dense dans $(\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \| \quad \|_\infty)$.

Par l´absurde, soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de B qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers e_{-1}. Puisque e_1 est borné sur $\mathbb{R}$, $(e_1 P_k)$ converge uniformément vers $x \mapsto 1$. Il vient $2\pi = \int_0^{2\pi} 1 = lim_{k\to+\infty} \int_0^{2\pi} e_1 P_k = 0$. Contradiction.
• B est fermée dans $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de points de B qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers un élément $f \in \mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Pour $n < 0$ dans $\mathbb{Z}$, e_{-n} étant bornée, $(f_p e_{-n})$ converge uniformément vers fe_{-n} d´où :

$$0 = lim_{p\to+\infty} \underbrace{c_n(f_p)}_{=0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} fe_{-n} = c_n(f)$$

cad : $f \in B$.
• B est l´adhérence des fonctions polynômes en e_1.

B, fermée dans $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, contient les polynômes en e_1, donc contient l´adhérence des polynômes en e_1. Réciproquement, pour $f \in B$ et $n \in \mathbb{N}$, chaque $S_k(f) \quad (0 \leqslant k \leqslant n)$ se décompose sur $(e_0, ..., e_n)$ donc $\sigma_n(f)$ égal à $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f)$ est un polynôme trigonométrique en e_1. Reste à conclure avec Fejer.

application 4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, 2π-périodique et impaire. On suppose que sa série de Fourier $\sum b_n \sin nx$ est à coefficients positifs. Alors $(S_n(f))$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

Le théorème de Fejer suggère d´écrire :

$$\| S_n(f) - f \|_\infty \leqslant \| S_n(f) - \sigma_n(f) \|_\infty + \| \sigma_n(f) - f \|_\infty$$

et il s´agit alors d´évaluer $\| S_n(f) - \sigma_n(f) \|_\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Delta_n(x) = S_n(f)(x) - \sigma_n(f)(x)$
$= \frac{1}{n+1}\{(n+1)(b_1 \sin x + ... + b_n \sin nx) -$
$[b_1 \sin x + (b_1 \sin x + b_2 \sin 2x) + ... + (b_1 \sin x + ... + b_n \sin nx)]\}$

$= \frac{1}{n+1}[b_1 \sin x + 2b_2 \sin 2x + ... + nb_n \sin nx]$
donc : $\forall x \in \mathbb{R} \qquad \Delta_n(x) \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} kb_k \quad (b_k \geqslant 0)$

Il suffit à présent de prouver que $(nb_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en moyenne vers 0.

• première étape : $\sigma_n(f)(\frac{\pi}{2(n+1)})$ tend vers 0 en $+\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. On écrit :

$\forall n \geqslant 0 \quad \mid \sigma_n(f)(\dfrac{\pi}{2(n+1)}) \mid \leqslant \mid \sigma_n(f)(\dfrac{\pi}{2(n+1)}) - f(\dfrac{\pi}{2(n+1)}) \mid + \mid f(\dfrac{\pi}{2(n+1)}) \mid$

On choisit N entier tel que :

$$\forall n \geqslant N \quad \mid \sigma_n(f)(\frac{\pi}{2(n+1)}) - f(\frac{\pi}{2(n+1)}) \mid \leqslant \parallel \sigma_n(f) - f \parallel_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme f est impaire et continue sur $\mathbb{R}$, f est nulle et continue en 0.
On peut donc choisir $N_1 \geqslant N$ tel que : $\forall n \geqslant N_1 \qquad \mid f(\frac{\pi}{2(n+1)}) \mid \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$
On a alors facilement : $\mid \sigma_n(f)(\frac{\pi}{2(n+1)}) \mid \leqslant \varepsilon$ si $n \geqslant N_1$

• deuxième étape : $\frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^{n} (n+1-k)kb_k$ tend vers 0 en $+\infty$.

$\forall n \geqslant 0 \quad \sigma_n(f)(\frac{\pi}{2(n+1)}) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)b_k \sin k\frac{\pi}{2(n+1)}$
donc $\sigma_n(f)(\frac{\pi}{2(n+1)}) \geqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)b_k \frac{2}{\pi} k \frac{\pi}{2(n+1)}$
avec l´inégalité de convexité $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x \quad (x \in [0, \frac{\pi}{2}])$
d´où $\sigma_n(f)(\frac{\pi}{2(n+1)}) \geqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)kb_k \geqslant 0$
cqfd avec le théorème des gendarmes.

• troisième étape : $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} kb_k$ tend vers 0 en ∞.

$\frac{1}{(2n+2)^2} \sum_{k=1}^{2n+1} (2n+2-k)kb_k$
$\geqslant \frac{1}{4(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n+1} (2n+2-k)kb_k$
$\geqslant \frac{1}{4(n+1)^2}(n+1) \sum_{k=1}^{n+1} kb_k$
$\geqslant \frac{1}{4(n+1)} \sum_{k=1}^{n} kb_k$
$\geqslant 0$
et par le théorème des gendarmes on a le résultat voulu.

Troisième partie

coefficients de Fourier en modes réel et complexe

L´écriture $c_n(f)$ à 2 entrées $n \in \mathbb{Z}$ et $f \in \mathcal{D}$ suggère l´étude des 2 objets $c_n(.) \quad (n\ fix\acute{e})$ et $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \quad (f fix\acute{e}e)$

1-coefficients de Fourier de 2 transformées

Soit f dans $\mathcal{D}$ et n dans $\mathbb{Z}$.

- coefficients de Fourier de $\tilde{f} : x \mapsto f(-x) : c_n(\tilde{f}) = c_{-n}(f)$
- coefficients de Fourier de $\tau_a f : x \mapsto f(x+a) : c_n(\tau_a f) = e^{ina}c_n(f)$

exercice On fixe a dans $\mathbb{R}$.
$f \to \tau_a f$ de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$ est linéaire continue pour $\| \quad \|_\infty$, $\| \quad \|_2$, $\| \quad \|_1$.

exercice On fixe f dans $\mathcal{D}$.
$a \mapsto \tau_a f$ est continue pour $\| \quad \|_2$, $\| \quad \|_1$

2- n fixé dans $\mathbb{Z}$, application c_n de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$

c_n est clairement linéaire.
Pour $f \in \mathcal{D}$, on a : $| c_n(f) | \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} | f | = \| f \|_1 \leqslant \| f \|_2 \leqslant \| f \|_\infty$
donc c_n est continue de $(\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \| \quad \|_p)$ dans $\mathbb{C} \qquad (p = 1, 2, \infty)$.
De plus, $f = e_n$ réalise l´égalité dans les inégalités précédentes
d´où : $||| c_n |||_p = 1$.

exercice On démontre le résultat suivant :

si f dans $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ a un coefficient de Fourier nul, alors $H_f = Vect(K_f) = Vect(f(.+\tau); \tau \in \mathbb{R})$ n´est pas dense dans $(\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \| \quad \|_\infty)$.

On choisit n dans $\mathbb{Z}$ tel que $c_n(f) = 0$.
On a : $\forall \tau \in \mathbb{R} \quad c_n(f_\tau) = e^{in\tau}c_n(f) = 0$ donc : $\forall g \in H_f \quad c_n(g) = 0$.
c_n étant continue sur $(\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \| \quad \|_\infty)$, il vient : $\forall h \in \bar{H}_f \quad c_n(h) = 0$.
Or : $c_n(e_n) = 1$, donc e_n n´appartient pas à $\bar{H}_f$.
D´où le résultat.

3- f fixée dans $\mathcal{D}$, suite des coefficients de f dans l_0^∞, l^2, l^1

A] un lemme de Riemann-Lebesgue qu´on décline

Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Pour f continue par morceaux sur $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose : $I_\lambda = \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt$.

proposition 1 Si f est C^1 sur $[a,b]$, alors on a :

$$lim_{\lambda \to +\infty} I_\lambda = 0$$

Pour $\lambda > 0$, après une intégration par parties justifiée par le caractère C^1 de f, on écrit : $I_\lambda = \frac{i}{\lambda}[-f(b)e^{i\lambda b} + f(a)e^{i\lambda a} + \int_a^b f'(t)e^{i\lambda t}dt]$
donc : $\mid I_\lambda \mid \leqslant \frac{1}{\lambda}[2 \parallel f \parallel_\infty + (b-a) \parallel f' \parallel_\infty]$. D´où le résultat.

remarque (valable aussi pour les propositions suivantes)
Par utilisation de $\tilde{f} : x \mapsto f(-x)$, on déduit : $lim_{\lambda \to +\infty} I_{-\lambda} = 0$,
puis par combinaisons linéaires,

$$lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)dt = 0 \quad ; \quad lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)dt = 0.$$

application Soit : $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. c_α désigne l´application 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $c_\alpha(x) = \cos(\alpha x)$ et $\sum a_k \cos kx$ sa série de Fourier.
La série numérique $\sum a_k$ converge et $\sum_{k=1}^\infty a_k = 1 - \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha}$

Pour x dans $[0, \pi]$ et n dans $\mathbb{N}^*$, on pose : $C_n(x) = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$.

Pour $x \neq 0$,

$\sin(\frac{x}{2})C_n(x)$
$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n [\sin((k+\frac{1}{2})x) - \sin((k-\frac{1}{2})x)]$
$= \frac{1}{2} [\sin((n+\frac{1}{2})x) + \sin(\frac{x}{2})]$ par télescopage
donc :

$$\forall x \in]0,\pi] \qquad C_n(x) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})} + \frac{1}{2}$$

(On remarque que C_n est continue en 0.)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$\sum_{k=1}^n a_k$
$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(\alpha x) - 1) \sum_{k=1}^n \cos kx \; dx$ *car* $\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^n \cos kx dx = 0$
$= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\cos(\alpha x) - 1)(C_n(x) - 1) \; dx$ *par parité*
$= \frac{2}{\pi} \int_{\to 0}^{\pi} \frac{cos(\alpha x)-1}{2\sin(\frac{x}{2})} \sin((n+\frac{1}{2})x)dx - \frac{1}{2}\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\cos(\alpha x) - 1)dx$
$= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{cos(\alpha x)-1}{2\sin(\frac{x}{2})} \sin((n+\frac{1}{2})x)dx - \frac{1}{2}\frac{2}{\pi}[\frac{\sin \pi\alpha}{\alpha} - \pi]$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{cos(\alpha x)-1}{2\sin(\frac{x}{2})}\sin((n+\frac{1}{2})x)dx + 1 - \frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}$

On pose : $\Phi(x) = \frac{cos(\alpha x)-1}{2\sin(\frac{x}{2})}$ pour $x \in]0,\pi]$
Φ est C^1 sur $]0,\pi]$ avec

$$\Phi'(x) = \frac{-2\alpha\sin(\frac{x}{2})\sin(\alpha x) + (1-\cos(\alpha x))\cos(\frac{x}{2})}{4\sin^2(\frac{x}{2})} \sim \frac{-\alpha^2}{2}$$

Φ admet un (unique) prolongement continu sur $[0,\pi]$ (Ecrire que Φ' est bornée au voisinage de 0, puis avec l´inégalité des accroissements finis, établir que Φ vérifie le critère de Cauchy en 0)
A présent, Φ est continue sur $[0,\pi]$, dérivable sur $]0,\pi]$ donc pour $x \in]0,\pi]$, $\frac{\Phi(x)-\Phi(0)}{x-0} = \Phi'(c_x)$ avec $c_x \in]0,x[$. Lorsque $x \to 0^+$, $c_x \to 0^+$ aussi et $\Phi'(c_x) \to -\frac{\alpha^2}{2}$ d´où la dérivabilité de Φ en 0 et la continuité de Φ' en 0.

D´après la proposition 1, $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{cos(\alpha x)-1}{2\sin(\frac{x}{2})}\sin((n+\frac{1}{2})x)dx$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D´où les résultats.

proposition 2 Si f est continue sur $[a,b]$ et C^1 sur $]a,b]$, alors on a :

$$lim_{\lambda\to+\infty} I_\lambda = 0$$

On découpe, par Chasles, I_λ en 2 intégrales, l´une petite par le choix d´un petit intervalle d´intégration (surlequel f continue est bornée), et l´autre qu´on contrôle grâce à la version précédente de Riemann-Lebesgue.

application : cf $\int_{\to 0}^{\to+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$

proposition 3 Si f est continue sur $[a,b]$, alors on a :

$$lim_{\lambda\to+\infty} I_\lambda = 0$$

remarque : quitte à séparer Re et Im, on suppose f à valeurs réelles.

lemme $C^1([a,b],\mathbb{R})$ est dense dans $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \| \quad \|_\infty)$

Soit g dans $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. On veut construire une suite de fonctions C^1 sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers g. On commence par prolonger g en une fonction continue sur $[a,b+1]$ en posant, pour $x \geqslant b$, $g(x) = g(b)$.
Soit G une primitive de g sur $[a,b+1]$.
Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n : x \mapsto n[G(x+\frac{1}{n}) - G(x)]$. G_n est C^1 sur $[a,b]$ et, par le théorème des accroissements finis appliqué à G (G à valeurs réelles), pour $x \in [a,b]$, $\mid G_n(x) - g(x) \mid$ s´écrit : $\mid g(x_n) - g(x) \mid$ avec $x_n \in]x, x+\frac{1}{n}[$.
On conclut à présent grâce à l´uniforme continuité de g sur $[a,b+1]$

preuve Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$\mid I_\lambda \mid \leqslant \mid \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt - \int_a^b g(t)e^{i\lambda t}dt \mid + \mid \int_a^b g(t)e^{i\lambda t}dt \mid$$

où g a été choisie dans $\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que $\| f - g \|_\infty \leqslant \varepsilon$.
On a alors : $\mid I_\lambda \mid \leqslant (b-a) \| f - g \|_\infty + \mid \int_a^b g(t)e^{i\lambda t}dt \mid$. D´où le résultat puisque, avec la proposition 1, $lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b g(t)e^{i\lambda t}dt = 0$.

application 1 Soit $f : \overline{D(0,1)} \to \mathbb{C}$ une application continue. On suppose qu´il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence supérieur à 1 telle que : $\forall z \in D(0,1)\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$
Alors (a_n) converge vers 0.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall r \in]0,1[\quad a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$
Le membre de gauche tend vers a_n quand r tend vers 1 ; Le membre de droite est une intégrale dépendant du paramètre r. $(r,\theta) \to f(re^{i\theta})e^{-in\theta}$ est globalement continue de $[0,1] \times [0,2\pi]$ dans $\mathbb{C}$, donc :

$$lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta.$$

Puisque $\theta \mapsto f(e^{i\theta})$ est continue sur $[0,2\pi]$, on a :

$$lim_{n\to +\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta = 0$$

D´où le résultat.

application 2 (vérifications laissées au lecteur) Soit $(a,b) \in]0,2\pi[^2$. La suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $I_n = \int_a^b \sum_{k=1}^n e^{ikt}\,dt = -i(\sum_{k=1}^n \frac{e^{ikb}}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{e^{ika}}{k})$ converge par Riemann-Lebesgue, vers $-\int_a^b \frac{e^{it}}{e^{it}-1}\,dt = \frac{i}{2}\int_a^b cotan(\frac{t}{2})\,dt - \frac{b-a}{2}$.
Pour $b = \pi$, la série $\sum \frac{e^{inb}}{n}$ converge (série harmonique alternée), donc pour tout $a \in]0,2\pi[$, $\sum \frac{e^{ina}}{n}$ et donc $\sum \frac{\sin na}{n}$ convergent. On retrouve par ailleurs pour $0 < a < 2\pi$,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n} = \frac{\pi - a}{2}.}$$

proposition 4 Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, alors on a :

$$lim_{\lambda \to +\infty} I_\lambda = 0$$

Soit $(a_k)_{0\leqslant k \leqslant N}$ une subdivision adaptée à f. On écrit : $I_\lambda = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{a_k}^{a_k+1} f(t)e^{i\lambda t}dt$.
On considère séparément chaque $\int_{a_k}^{a_k+1} f(t)e^{i\lambda t}dt$. On ne change pas la valeur de cette intégrale en remplaçant f par sa prolongée continue sur $[a_k, a_{k+1}]$ et on peut conclure grâce à la proposition 3 sur chaque $[a_k, a_{k+1}]$.

proposition 5

- $\forall f \in \mathcal{D} \quad (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in l_0^\infty$
- $f \to (c_n(f))$ est linéaire continue de $(\mathcal{D}, \| \quad \|_1)$ dans l_0^∞ muni de la norme infinie.

B] À propos de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

énoncé
L´intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge et on a :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.}$$

preuve
• L´intégrale oscillante $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est faussement impropre en 0 (borne 0 finie et prolongement par continuité de $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ en 0) ;
• Pour $u > 1$, on a : $\int_1^u \frac{\sin t}{t} dt = \cos 1 - \frac{\cos u}{u} - \int_1^u \frac{\cos t}{t^2} dt$ après une intégration par parties ; On a : $\mid \frac{\cos u}{u} \mid \leqslant \frac{1}{u}$ donc $\frac{\cos u}{u}$ tend vers 0 quand $u \to 0$. Par ailleurs, on a : $\mid \frac{\cos t}{t^2} \mid \leqslant \frac{1}{t^2}$ donc, par comparaison, $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2} dt$ est absolument convergente. $\int_1^u \frac{\sin t}{t} dt$ possède donc une limite finie lorsque u tend vers $+\infty$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \int_0^\pi C_n(x)dx = \frac{\pi}{2} + \underbrace{\int_{\to 0}^\pi \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})} dx}_{faussement\, impropre\, en\, 0} \quad ; \quad v_n = \underbrace{\int_{\to 0}^\pi [\frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})}] \sin((n+\frac{1}{2})x) dx}_{faussement\, impropre\, en\, 0}$$

- $u_n = \pi$ donc $\int_0^\pi \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})} dx = \frac{\pi}{2}$
- Soit Φ l´application de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

  $$\Phi(0) = 0 \text{ et } \Phi(x) = \frac{2\sin(\frac{x}{2}) - x}{2x\sin(\frac{x}{2})} \quad (x \neq 0)$$

  Φ est continue sur $]0, \pi]$.
  On a : $\frac{2\sin(\frac{x}{2}) - x}{2x\sin(\frac{x}{2})} \sim_0 \frac{-x}{24}$ donc Φ est continue en 0.
  De plus, Φ est dérivable sur $]0, \pi]$, avec pour $x \in]0, \pi]$,
  $\Phi'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{\cos \frac{x}{2}}{4\sin^2 \frac{x}{2}}$ donc Φ est C^1 sur $]0, \pi]$.
  Par Riemann-Lebesgue, on a : $lim_{n\to+\infty} v_n = 0$

d´où : $lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.
Or : $\int_0^\pi \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{x}dx = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin t}{t}dt$ d´où l´égalité : $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$

Voici une égalité amusante au passage ; $t \mapsto \frac{\sin^2 t}{t^2}$ est clairement intégrable sur $[0,+\infty[$ et, après intégration par parties sous forme propre et passage à la limite, on obtient :

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}dt = \int_0^\infty \frac{\sin 2t}{t}dt = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt}$$

Remarque 0 $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$ et les transformées de Laplace (brève de preuve)

On appelle h l´application continue sur $[0,+\infty[$ définie par : $h(t) = \frac{\sin t}{t}$ si $t > 0$, $h(0) = 1$. Pour $\lambda \geqslant 0$, on pose à bon droit : $F(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{\sin t}{t}dt$. En posant $F_n(\lambda) = \int_0^n e^{-\lambda t}h(t)\,dt$, on a une fonction continue en λ, dérivable sur $[0,+\infty[$, de dérivée $F_n'(\lambda) = -\int_0^n e^{-\lambda t}\sin t\,dt$.

• Pour $0 < a \leqslant \lambda$, $\mid F(\lambda) - F_n(\lambda) \mid = \mid \int_n^{+\infty} e^{-\lambda t}h(t)dt \mid \leqslant \parallel h \parallel_\infty \int_n^{+\infty} e^{-ta}dt$ donc (F_n) converge uniformément vers F sur $[a,+\infty[$, d´où la continuité de F sur l´intervalle $]0,+\infty[$.
• Pour $0 < \lambda$, $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\sin t\,dt$ converge et pour $0 < a \leqslant \lambda$, on peut écrire : $\mid -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\sin t\,dt - F_n'(\lambda) \mid \leqslant \int_n^{+\infty} e^{-ta}dt$ donc F_n' converge uniformément sur tout $[a,+\infty[$ vers $\lambda \mapsto -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\sin t\,dt$. De là, F est dérivable sur $]0,+\infty[$ avec $F'(\lambda) = -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\sin t\,dt$.

Par deux intégrations par parties, on a : $F'(\lambda) = -\frac{1}{1+\lambda^2}$ et de ce fait : $F(\lambda) = C - \arctan\lambda$. Or : $\mid F(\lambda) \mid \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \parallel h \parallel_\infty dt = \frac{\|h\|_\infty}{\lambda}$, $\lambda > 0$ donc $\lim_{\lambda\to\infty}F(\lambda) = 0$ d´où : $C = \frac{\pi}{2}$.

Pour conclure, on peut utiliser l´équivalent d´Abel radial pour les transformées de Laplace (cf agrégation interne session 2001) : on sait que $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$ converge donc $F(\lambda)$ tend vers $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$ quand λ tend vers 0^+. D´où l´égalité : $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

On peut aussi prouver "à la main" que F est continue en 0.
Pour $\lambda \geqslant 0$, on écrit : $F(\lambda) = \lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-\lambda t}h(t)dt \quad (\star)$, puis
$\int_0^{n\pi} e^{-\lambda t}h(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\lambda t}h(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \underbrace{\int_0^\pi e^{-(k\pi+u)\lambda}\frac{\sin u}{k\pi+u}du}_{0\leqslant u_k(\lambda)\leqslant\frac{1}{k}}$

Pour $\lambda \geqslant 0$, $\sum(-1)^k u_k(\lambda)$ est une série alternée, convergente d´après $(\star)$,donc on a la majoration uniforme en $\lambda \geqslant 0$:

$$\mid F(\lambda) - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k u_k(\lambda) \mid \leqslant \mid (-1)^n u_n(\lambda) \mid \leqslant \frac{1}{n}.$$

F, limite uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions continues $\sum(-1)^k u_k$, est elle-même continue sur $[0,+\infty[$.

Remarque 1 $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n´est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.

Sinon, $t \mapsto \frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1-\cos(2t)}{2t}$ l´est aussi par comparaison $(0 \leqslant \frac{sin^2 t}{t} \leqslant \frac{|\sin t|}{t}\,;\, t \geqslant 1)$. Puisque $\int_1^{\to\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ converge (intégration par parties), par différence, $\int_1^{\to\infty} \frac{dt}{t}$ converge. Faux !

L´encadrement $\frac{sin^2 t}{t} \leqslant \frac{|\sin t|}{t} \leqslant \frac{1}{t}$ valable pour $t \geqslant 1$ et la convergence de $\int_1^{\to\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ assurent que $\int_1^X \frac{|\sin t|}{t} dt$ est "en $\ln X$" au voisinage de $+\infty$.

Remarque 2 comportement de la tranche de Cauchy $C_n = \int_n^{2n} \frac{|\sin t|}{t} dt$

lemme : Soit E un $\mathbb{R}$evn, A une partie dense de E, (l_n) une suite bornée (par M) de $(E', |\| \quad \||)$ qui converge simplement sur A.
Alors (l_n) converge simplement sur E.

Soit $x \in E$, (x_n) une suite de points de A qui converge vers x.
Il suffit de montrer que la suite réelle $(l_n(x))$ est de Cauchy.
Pour $p \leqslant q$ dans $\mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\mid l_q(x) - l_p(x) \mid \leqslant 2M \parallel x_n - x \parallel + \mid l_q(x_n) - l_p(x_n) \mid .$$

On choisit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $2M \parallel x_N - x \parallel \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Puisque la suite convergente $(l_n(x_N))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy, on choisit n_0 tel que $q \geqslant p \geqslant n_0 \Rightarrow \mid l_q(x_N) - l_p(x_N) \mid \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Dans les circonstances dites, $\mid l_q(x) - l_p(x) \mid \leqslant \varepsilon$ cqfd

complements • la fonction limite simple notée l est une forme linéaire
• Puisque chaque $l_n \in E'$ est M-lipschitzienne, par convergence simple, l est aussi M-lipschitzienne.

retour au probleme : pour $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n = \int_1^2 \frac{|\sin(nt)|}{t} dt$.
Pour $f \in E = \mathcal{C}([1,2],\mathbb{R})$, on pose : $l_n(f) = \int_1^2 f(t) \mid \sin(nt) \mid dt$

Via l´inégalité $\mid l_n(f) \mid \leqslant \parallel f \parallel_\infty$valable pour $n \in \mathbb{N}^*$, (l_n) est une suite de formes linéaires continues bornée par 1 dans $(E', |\| \quad \||)$.
Soit Ξ le sev dense de $(E, \| \quad \|_\infty)$ formé des fonctions en escalier sur $[1,2]$.
Pourquoi (l_n) converge-t-elle simplement sur Ξ ?

Par linéarité de l_n, on se limite à une fonction caractéristique $\chi_{(a,b)}$ où $1 \leqslant a < b \leqslant 2$
$\int_a^b \mid \sin(nx) \mid dx = \frac{1}{n} \int_{na}^{nb} \mid \sin u \mid du = \frac{1}{n} [\int_{na}^{p_n\pi} + \int_{p_n\pi}^{q_n\pi} + \int_{q_n\pi}^{nb}]$ où on a posé :

$p_n = E(\frac{na}{\pi}) + 1$ et $q_n = E(\frac{nb}{\pi})$
Les termes bordants sont nuls à l´infini car les nombres positifs $\int_{na}^{p_n\pi}$ et $\int_{q_n\pi}^{nb}$ sont majorés par "l´aire sous arche" $\frac{2}{\pi}$.
Le terme médian vaut : $\frac{1}{n}\int_{p_n\pi}^{q_n\pi} = \frac{1}{n}\frac{2}{\pi}[q_n - p_n]$ où $q_n - p_n$ représente un nombre entier d´arches. Puisque $n\frac{b-a}{\pi} - 2 \leqslant q_n - p_n \leqslant n\frac{b-a}{\pi}$, ce terme médian tend vers $\frac{2(b-a)}{\pi}$ quand n tend vers $+\infty$. cqfd

En vertu du lemme, (l_n) converge simplement sur E vers une forme linéaire continue notée l. Avec $(E, \| \quad \|_\infty)$ complet, la continuité de l peut aussi être justifiée par le théorème de Banach-Steinhaus (cf annexe 2 p.71). Or l et $\tilde{l} : f \mapsto \frac{2}{\pi}\int_1^2 f$, toutes les deux continues, coincident sur la partie dense Ξ de E, donc $l \equiv \tilde{l}$ par le principe de prolongement des identités.

conséquence : $\boxed{C_n = \int_n^{2n} \frac{|\sin t|}{t} dt \longrightarrow_{n\to+\infty} \frac{2}{\pi}\ln 2}$

Le principe de prolongement des identités est un argument type "densité-fermeture". Proposer une variante en posant

$$\Omega = \{f \in E \setminus l_n(f) \longrightarrow_{n\to+\infty} \frac{2}{\pi}\int_1^2 f\}$$

et en montrant que Ω est un sev dense et séquentiellement fermé dans $(E, \| \quad \|_\infty)$.

Remarque 3 Equivalent en $+\infty$ de $\int_1^X \frac{|\sin t|}{t} dt$

L´idée est de montrer que :

$$\boxed{\int_1^X \frac{|\sin t|}{t} dt \sim \int_1^X \frac{\mu}{t} dt = \mu \ln X}$$

où $\mu = \frac{2}{\pi}$ est la valeur moyenne de $t \mapsto |\sin t|$.
L´application $s : t \mapsto |\sin t| - \mu$, qui a un coefficient de Fourier $c_0(s)$ nul, admet une primitive $G : x \mapsto \int_0^x s(t)dt$ 2π-périodique. En effet, pour $x \in \mathbb{R}$, $G(x + 2\pi) - G(x) = \int_x^{x+2\pi} s(t)dt = 2\pi c_0(s) = 0$

On a par intégration par parties :

$$\int_1^X \frac{s(t)}{t} dt = \int_1^X \frac{|\sin t| - \mu}{t} dt = G(1) - \frac{G(X)}{X^2} + \int_1^X \frac{G(t)}{t^2} dt$$

G continue et 2π-périodique est bornée donc $\frac{G(X)}{X^2}$ et $\int_1^X \frac{G(t)}{t^2} dt$ ont une limite finie quand X tend vers $+\infty$. On a montré que $\int_1^X \frac{|\sin t|}{t} dt - \int_1^X \frac{\mu}{t} dt$ a une limite finie en $+\infty$ d´où l´équivalence souhaitée.
On pourra comparer ce résultat à l´exercice page 24.

Remarque 4 On retrouve le résultat classique relatif au noyau de Gibbs : $\exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall t \in [0, \pi]\ \ |\ G_n(t)\ | \leqslant M$

Pour $t \in [0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$,
$G_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kt}{k} = \int_0^t [C_n(x) - 1]dx$
$= -\frac{t}{2} + \int_{\to 0}^{t} \sin(n + \frac{1}{2})x\ (\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{x})dx + \int_{\to 0}^{t} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}dx$
donc : $|\ G_n(t)\ | \leqslant \frac{\pi}{2} + \int_0^\pi |\ \Phi\ | + |\ \int_0^t \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}dx\ |$

Dans le dernier terme, on ramène les 2 entrées n et t aux bornes par le changement de variable "$u = (n+\frac{1}{2})x$". $X \mapsto \int_0^X \frac{\sin u}{u}du$ est continue sur $]0, +\infty[$, possède des limites finies en 0 et en $+\infty$, donc est bornée sur $[0, +\infty[$.
D´où le résultat.

exercice 1 Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose : $W_k = \int_0^{k\pi} \frac{\sin t}{t}dt$.
1) Montrer que $W_k = \sum_{l=0}^{k-1} w_l$ avec $w_l = (-1)^l \int_0^\pi \frac{\sin u}{u+l\pi}$ $\qquad (0 \leqslant l \leqslant k-1)$.
2) Vérifier que : $\forall l \in \mathbb{N}\quad w_l \neq 0$.
3) Montrer que les W_k sont alternativement strictement supérieurs et strictement inférieurs à $\frac{\pi}{2}$.

1) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $W_k = \int_0^{k\pi} \frac{\sin t}{t}dt = \sum_{l=0}^{k-1} \int_{l\pi}^{(l+1)\pi} \frac{\sin t}{t}dt = \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \int_0^\pi \frac{\sin u}{u+l\pi}du$ après le changement de variable "$t = u + l\pi$".
2) Pour $l \in \mathbb{N}$, $u \mapsto \frac{\sin u}{u+l\pi}$ de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ est continue, positive et non identiquement nulle donc $\int_0^\pi \frac{\sin u}{u+l\pi}du > 0$.
3) Pour $l \in \mathbb{N}$, on a : $|\ w_l\ | = \int_0^\pi \frac{\sin u}{u+l\pi}du \leqslant \frac{1}{l\pi}\pi$ donc $|\ w_l\ | \to_{l\to+\infty} 0$.
Par ailleurs, $\forall l \in \mathbb{N}\ \forall u \in]0, \pi[\ \ \frac{\sin u}{u+(l+1)\pi} < \frac{\sin u}{u+l\pi}$ donc par continuité de $u \mapsto \frac{\sin u}{u+(l+1)\pi}$ et $u \mapsto \frac{\sin u}{u+l\pi}$ sur $[0, \pi]$, $w_{l+1} < w_l$. Par le théorème des séries alternées (cf annexe 3 page 69), $\sum w_l$ est convergente (de somme $\frac{\pi}{2}$) et le reste $\frac{\pi}{2} - W_k \quad (k \in \mathbb{N}^*)$ est du signe de son premier terme, non nul, et donc alternativement strictement positif et strictement négatif. En particulier, on retrouve l´inégalité $\frac{\pi}{2} - W_1 = \frac{\pi}{2} - \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}dt < 0$ (cf page 11)

exercice 2 On rappelle que :
- $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in [0, \pi]\ G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} = -\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$
- (G_n) converge simplement sur $]0, \pi]$ vers $b : x \mapsto \frac{\pi - x}{2}$.

On pose : $R_n(x) = G_n(x) - b(x) \qquad (n \in \mathbb{N}^*\,;\ x \in]0, \pi])$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier les variations de R_n.

Par continuité de $t \mapsto \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$ sur $]0, \pi]$, R_n est dérivable sur $]0, \pi]$ avec $R_n'(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}}$. Les zéros de R_n' sont donc les $x_{k,n} = \frac{k\pi}{n+\frac{1}{2}} = \frac{2k\pi}{2n+1}$ avec $1 \leqslant k \leqslant n$. Pour $0 < x \leqslant \pi$, $2\sin\frac{x}{2} > 0$ donc le signe de $R_n'(x)$ sur $]0, \pi]$ est

donné par celui de $\sin(n+\frac{1}{2})x$; R_n est positif sur $]0, x_{1,n}]$, du signe de $(-1)^k$ sur $[x_{k,n}, x_{k+1,n}] \qquad (1 \leqslant k \leqslant n-1)$, et du signe de $(-1)^n$ sur $[x_{n,n}, \pi]$.
R_n oscille donc sur $]0, \pi]$ entre des extréma atteints en $x_{k,n}$, maxima locaux aux $x_{2p+1,n} \quad (0 \leqslant p \leqslant E(\frac{n}{2}))$ et minima en $x_{2p,n} \quad (1 \leqslant p \leqslant E(\frac{n}{2}))$.

exercice 3 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comparer, pour n "grand", le signe des extréma consécutifs $R_n(x_{k,n})$ et $R_n(x_{k+1,n})$ de R_n.

Soit $\tilde{\Phi} = -\Phi$ définie sur $[0, \pi]$ par $\tilde{\Phi}(0) = 0$, $\tilde{\Phi}(x) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{x}$. On rappelle que $\tilde{\Phi}$ est continue sur $[0, \pi]$, C^1 sur $]0, \pi]$ et on peut vérifier que $\tilde{\Phi}$ est C^1 sur $[0, \pi]$. Pour $x \in]0, \pi]$, on écrit :

$$R_n(x) = \underbrace{\int_0^x \tilde{\Phi}(t)\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt}_{J_n(x)} + \int_0^{(n+\frac{1}{2})x} \frac{\sin t}{t}dt - \frac{\pi}{2}.$$

On intègre à bon droit $J_n(x)$ par parties :

$$J_n(x) = \frac{1}{n+1}[-\tilde{\Phi}(x)\cos(n+\frac{1}{2})x + \int_0^x \tilde{\Phi}'(t)\cos(n+\frac{1}{2})t\,dt].$$

$\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\Phi}'$, continues sur $[0, \pi]$, sont bornées donc on peut choisir $M > 0$ tel que : $\forall x \in]0, \pi] \quad | J_n(x) | \leqslant \frac{M}{n+\frac{1}{2}}$. Soit k fixé dans $\mathbb{N}^*$. Avec la remarque ci-dessus, les suites $(R_n(x_{k,n}))_{n>k}$ et $(R_n(x_{k+1,n}))_{n>k+1}$ convergent vers $\int_0^{k\pi} \frac{\sin t}{t}dt - \frac{\pi}{2}$ et $\int_0^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t}dt - \frac{\pi}{2}$, limites non nulles et de signes contraires. On peut donc choisir un rang ("moralement grand") au delà duquel les extréma consécutifs $R_n(x_{k,n})$ et $R_n(x_{k+1,n})$ ont le même signe que leur limite respective.

On appelle $(R_n(x_{k,n}))_{n>k}$ suite des k^{èmes} bosses vraies et $\int_0^{k\pi} \frac{\sin t}{t}dt - \frac{\pi}{2}$ bosse idéale associée.

exercice 4 Soit $x_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Montrer que (R_n) converge uniformément vers 0 sur $[x_0, \frac{\pi}{2}]$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$. L´idée est de ne garder sur $[x_0, \frac{\pi}{2}]$ que les bosses idéales d´amplitudes inférieures à $\frac{\varepsilon}{2}$ et les bosses vraies d´amplitudes inférieures à ε. On commence par choisir $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :
$k \geqslant k_0 \Rightarrow | \int_0^{k\pi} \frac{\sin t}{t}dt - \frac{\pi}{2} | \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, puis $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $x_{k_0,n_0} = \frac{2k_0\pi}{2n_0+1} < x_0$.
Ces manipulations visent à faire glisser les bosses contre l´axe des abscisses.
On canalise ensuite les bosses vraies $(R_n(x_{k,n}))_{n\in\mathbb{N}^*, 1\leqslant k\leqslant n}$ dans un tube d´épaisseur $\frac{\varepsilon}{2}$ autour des bosses idéales. Quitte à remplacer n_0 par un entier qui lui est supérieur, on suppose que : $\frac{M}{n_0+\frac{1}{2}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
que se passe -t-il à droite de x_0 ?

Soit $x \in [x_0, \frac{\pi}{2}]$. Pour $n \geqslant n_0$, $x_{k_0,n} < x_{k_0,n_0} < x_0 \leqslant x$. On choisit $k > k_0$ tel que : $x_{k,n} \leqslant x \leqslant x_{k+1,n}$. Par monotonie de R_n sur $[x_{k,n}, x_{k+1,n}]$,
$\mid R_n(x) \mid \leqslant Max \{\mid R_n(x_{k,n}) \mid ; \mid R_n(x_{k+1,n}) \mid\}$
$\leqslant Max \{\mid J_n(x_{k,n}) \mid + \mid \int_0^{k\pi} \frac{\sin t}{t} dt - \frac{\pi}{2} \mid ;$
$\mid J_n(x_{k+1,n}) \mid + \mid \int_0^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt - \frac{\pi}{2} \mid\} \leqslant \frac{M}{n+\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$.
Puisque le rang n_0 ne dépend pas de x, on a prouvé que (R_n) converge uniformément vers 0 sur $[x_0, \frac{\pi}{2}]$.

C] projection orthogonale de f sur $\mathcal{T}_p$ $(p \in \mathbb{N})$

Pour f élément de $\mathcal{D}$,

- le vecteur $S_p(f)$ ($p^{ème}$ somme de Fourier de f) appartient à $\mathcal{T}_p$.
- pour $-p \leqslant k \leqslant p$,
  $(e_k \mid f - S_p(f)) = (e_k \mid f) - (e_k \mid S_p(f))$
  $= c_k(f) - (e_k \mid \sum_{j=-p}^{p} c_j(f) e_j)$
  $= c_k(f) - c_k(f) = 0$
  donc $f - S_p(f)$ appartient à $\mathcal{T}_p^{\perp}$.

(La décomposition $f = S_p(f) + (f - S_p(f))$ est unique car on a clairement $\mathcal{T}_p \cap \mathcal{T}_p^{\perp} = \{0\}$)

Avec Pythagore, on a : $\| f \|_2^2 = \| S_p(f) \|_2^2 + \| f - S_p(f) \|_2^2$
donc $\| S_p(f) \|_2^2 \leqslant \| f \|_2^2$. (égalité dans cette inégalité si $f \in \mathcal{T}_p$)

Bilan : pour tout p dans $\mathbb{N}$, S_p est l´opérateur de projection orthogonale d´image $\mathcal{T}_p$, continu pour la norme $\| \quad \|_2$ et on a $||| S_p |||_2 = 1$.

remarque : pour $q \in \mathcal{T}_p$, écrivant que $f - q = f - S_p(f) + S_p(f) - q$ et remarquant que $S_p(f) - q \in \mathcal{T}_p$, on a :

$$\| f - q \|_2^2 = \| f - S_p(f) \|_2^2 + \| S_p(f) - q \|_2^2$$

et sans surprises : $\| f - q \|_2^2 \geqslant \| f - S_p(f) \|_2^2$
Autrement dit, $S_p(f)$ est le polynôme trigonométrique de $\mathcal{T}_p$ le plus proche de f pour la norme $\| \quad \|_2$.

inégalité de Bessel-Parseval L´inégalité $\| S_p(f) \|_2^2 \leqslant \| f \|_2^2$ s´écrit aussi : $\mid c_0 \mid^2 + \sum_{k=1}^{p} [\mid c_k \mid^2 + \mid c_{-k} \mid^2] \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mid f(t) \mid^2 dt$. La série à termes positifs $\sum [\mid c_k \mid^2 + \mid c_{-k} \mid^2]$ a ses sommes partielles majorées donc converge, et on a l´inégalité de Bessel-Parseval :

$$\boxed{\mid c_0 \mid^2 + \sum_{k=1}^{\infty} [\mid c_k \mid^2 + \mid c_{-k} \mid^2] \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mid f(t) \mid^2 dt}$$

Avec la dite inégalité , la famille de réels positifs $(\mid c_n \mid^2)$ est sommable et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \mid c_n \mid^2 = \mid c_0 \mid^2 + \sum_{k=1}^{\infty} [\mid c_k \mid^2 + \mid c_{-k} \mid^2] \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mid f(t) \mid^2 dt$

remarque Série trigonométrique vs série de Fourier.
$\sum \frac{\sin nx}{\ln n}$ est une série trigonométrique qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ par Abel. Existe-t-il un élément f de $\mathcal{D}$ dont la série de Fourier est $\sum \frac{\sin nx}{\ln n}$?
Si tel est le cas, la série de Bertrand $\sum \frac{1}{\ln^2 n}$ converge. Faux !

théorème $\Phi : f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est linéaire continue de $(\mathcal{D}, \| \quad \|_2)$ dans l^2.

exercice Montrer que la suite $(S_p(f))_{p\in\mathbb{N}}$ des projetés orthogonaux de f sur $\mathcal{T}_p$ est de Cauchy dans $(\mathcal{D}, \| \quad \|_2)$.

Pour $p < q$ dans $\mathbb{N}$, $\| S_q(f) - S_p(f) \|_2^2 = \| \sum_{q \geqslant |k| > p} c_k e_k \|_2^2 = \sum_{q\geqslant |k|>p} | c_k |^2$
Soit $\varepsilon > 0$. Avec $\sum | c_k |^2$ convergente, on choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$p \geqslant N \Rightarrow \sum_{|k|>p} | c_k |^2 \leqslant \varepsilon$$

Pour $p, q \geqslant N$, $\| S_q(f) - S_p(f) \|_2^2 \leqslant \varepsilon$ d´où le résultat.

D] coefficients de Fourier d´une dérivée

définition Si $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\mathcal{C}^k_{pm}$ désigne le sev de $\mathcal{D}$ des fonctions de classe C^k par morceaux ; f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est C^k par morceaux si elle est C^k par morceaux sur chaque segment de $\mathbb{R}$, et g de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est C^k par morceaux lorsqu´il existe une subdivision $S = \{x_0 = a, ..., x_n = b\}$ de $[a, b]$ et, pour chaque j dans $\{0, ..., n-1\}$, g_j dans $\mathcal{C}^k([x_k, x_{k+1}], \mathbb{C})$ de façon que $g_{|]x_k,x_{k+1}[} = g_{j_{|]x_k,x_{k+1}[}}$

Pour f dans $\mathcal{C}^1_{pm}$, on choisit $S = \{x_0 = 0, ..., x_p = 2\pi\}$ et $(g_k)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ dans $\mathcal{C}^1([x_k, x_{k+1}], \mathbb{C})$ adaptées à f sur le segment $[0, 2\pi]$.

f est C^1 sur chaque $]x_k, x_{k+1}[$ et on pose :

$$f'(x_0) = g_0'(x_0) \quad ; \quad f'(x_p) = g_{p-1}'(x_p) \quad ; \quad f'(x_k) = \frac{1}{2}(g_{k-1}'(x_k) + g_k'(x_k)) \quad (1 \leqslant k \leqslant p-1)$$

lemme Soit $f \in \mathcal{C}^1_{pm} \cap \mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
Pour n dans $\mathbb{Z}$, on a :

$$\boxed{\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}dt = in \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \quad ou \quad c_n(f') = inc_n(f)}$$

Vite dit, la série de Fourier de la dérivée de f s´obtient en dérivant terme à terme la série de Fourier de f.

remarque : la continuité de f est essentielle ; considérer un signal carré...

preuve : par Chasles et fonctions intégrandes differant sur des finis, on a :

$$\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}dt = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} g_k'(t)e^{-int}dt = \sum_{k=0}^{p-1} [g_k(t)e^{-int}]_{x_k}^{x_{k+1}} + in\int_{x_k}^{x_{k+1}} g_k(t)e^{-int}dt$$

Or : $g_k(x_k) = f(x_k)$ et $g_k(x_{k+1}) = f(x_{k+1})$ car f est continue
donc : $\sum_{k=0}^{p-1} [g_k(t)e^{-int}]_{x_k}^{x_{k+1}} = f(2\pi) - f(0) = 0$.
Chaque $\int_{x_k}^{x_{k+1}} g_k(t)e^{-int}dt$ vaut $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)e^{-int}dt$ et la preuve est complète.

exercice Pour $f \in \mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, montrer l´équivalence :
f est C^∞ ssi $\forall k \in \mathbb{N} \quad c_n(f) = \circ(\frac{1}{n^k})$.

Si f est C^∞, $c_n(f) = \circ(1)$ par Riemann-Lebesgue ; pour $k \geqslant 1$, k intégrations par parties successives donnent : $c_n(f) = \frac{1}{(in)^k}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^{(k)}(t)e^{-int}dt$. De là : $\mid n^k c_n(f) \mid = \mid c_n(f^{(k)}) \mid$. Par Riemann-Lebesgue appliqué à $f^{(k)}$, $n^k c_n(f)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. cette première étape montre que plus le signal décrit par f est "lisse", plus les harmoniques de rang élevé sont "négligeables".
Réciproquement, si $\forall k \in \mathbb{N} \quad c_n(f) = \circ(\frac{1}{n^k})$, alors pour toute valeur de $p \in \mathbb{N}$ la série $\sum c_n(f)(in)^p e^{inx}$ est normalement convergente ($\mid n^p c_n(f) \mid = \circ(\frac{1}{n^2})$). En particulier, $\sum c_n(f)e^{inx}$ converge normalement ; on a alors, puisque f est continue, $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}$ pour tout réel x (cf page 23). Par reccurence, on peut dériver terme à terme grâce aux convergences normales et conclure que f est C^∞.

propriété Si f est 2π-périodique, continue et C^1 par morceaux, alors $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est un élément de l^1.

On écrit : $\forall n \in \mathbb{Z}^* \qquad \mid c_n(f) \mid = \frac{1}{|n|} \mid c_n(f') \mid$
et on remarque : $\frac{1}{|n|} \mid c_n(f') \mid \leqslant \frac{1}{2}[\frac{1}{n^2} + \mid c_n(f') \mid^2]$
avec : $(\frac{1}{|n|})$ et $(c_n(f'))$ éléments de l^2

Quatrième partie
Un théorème de Riemann

1-énoncé

Si la série de fonctions $\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f continue, alors la série de Fourier de f coincide avec la série trigonométrique qui la définit, ie les coefficients de Fourier de f sont donnés par $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$.

2-preuve

a) stratégie : on résume en partie l´idée par "intégrer pour dériver" ; on ne peut intervertir directement les signes $\int_0^{2\pi}$ et $\sum_{n=1}^{\infty}$ dans le calcul des coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$, faute de convergence uniforme. On transite par une primitive seconde de f dont on détermine facilement les coefficients de Fourier, et on revient ensuite à f.

f est un élément de $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, donc $\phi : x \mapsto \int_0^x f$ est C^1 sur $\mathbb{R}$. Maintenant $\Phi : x \mapsto \int_0^x \phi$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\Phi'' = f$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\rho_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$, et on envisage la série de fonction $\frac{a_0}{4}x^2 - \sum \frac{1}{n^2}\rho_n(x)$ obtenue en primitivant formellement deux fois la série qui définit f. A x fixé dans $\mathbb{R}$, $(\rho_n(x))$ a ses sommes partielles bornées et $(\frac{1}{n^2})$ décroit vers 0 donc par Abel, $\sum \frac{1}{n^2}\rho_n(x)$ converge. On pose : $F(x) = \frac{a_0}{4}x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\rho_n(x)$.

b) lemme de Cantor-Lebesgue : (a_n) et (b_n) tendent vers 0
La preuve qui suit vient d´une note de B. Randé (RMS mai-juin 1998)

$\sum \rho_n(0)$ ou $\sum a_n$, converge donc (a_n) tend vers 0. Pour $x \in \mathbb{R}$, $(\rho_n(x))$ tend vers 0 car $\sum \rho_n(x)$ converge, et $(a_n \cos nx)$ tend aussi vers 0 car (a_n) tend vers 0 et $(\cos nx)$ est bornée , donc par différence, $(b_n \sin nx)$ tend vers 0. Si on suppose que la suite (b_n) ne converge pas vers 0, on choisit $\varepsilon > 0$ et une suite extraite $(b_{\psi(n)})$ de (b_n) tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mid b_{\psi(n)} \mid \geqslant \varepsilon$. Il vient : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leqslant \varepsilon \mid \sin(\psi(n)x) \mid \leqslant \mid b_{\psi(n)} \sin(\psi(n)x) \mid$.
Par le théorème des gendarmes, $(\sin(\psi(n)x))$ et $(\sin^2(\psi(n)x))$ convergent vers 0, et ce pour tout $x \in \mathbb{R}$. La suite de fonctions continues $x \mapsto \sin^2(\psi(n)x)$, qui converge simplement vers l´application nulle, est dominée en valeur absolue par l´application constante 1, donc par le théorème de convergence dominée, $\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \sin^2(\psi(n)t)dt = 0$.
Absurde puisque $\forall n \in \mathbb{N}^* \int_0^{2\pi} \sin^2(\psi(n)t)dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[1 - \cos(2\psi(n)t)]dt = \pi$.

conséquence : (a_n) et (b_n) sont bornées donc on peut choisir $M > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad | \frac{1}{n^2}\rho_n(x) | \leqslant \frac{M}{n^2}$. Ceci montre que la série de fonctions définissant F converge normalement sur $\mathbb{R}$. De là, $x \mapsto F(x) - \frac{a_0}{4}x^2$ appartient à $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et ses coefficients de Fourier sont donnés par $(\frac{-a_n}{n^2})$ et $(\frac{-b_n}{n^2})$.

remarque : on ne peut affirmer que F est C^2 (avec $F'' = f$), on s´en approche en introduisant la pseudo-dérivée seconde.

c) dérivée seconde au sens de Schwarz

lemme

Soit $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que :

• pour tout réel x le quotient $\Delta_2 g(h, x) = \frac{g(x+h)+g(x-h)-2g(x)}{h^2}$ possède une limite réelle (notée $g^{('')}(x)$) quand h tend vers 0.

• $g^{('')} \equiv 0$

Alors g est une application affine.

remarques : $g^{('')}$ est appelée dérivée seconde au sens de Schwarz ou pseudo-dérivée seconde de g. On voit facilement que les fonctions deux fois pseudo-dérivables sur $\mathbb{R}$ forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sur lequel l´opérateur $^{('')}$ est linéaire. On vérifie aussi avec la formule de Taylor-Young que toute fonction g C^2 sur $\mathbb{R}$ est pseudo-dérivable deux fois avec $g^{('')} = g''$.

preuve du lemme : soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$, γ l´application affine définie par $\gamma(a) = g(a)$ et $\gamma(b) = g(b)$. On veut : $\gamma = g$ sur $[a, b]$. On envisage pour $\varepsilon > 0$ l´application $P : x \mapsto g(x) - \gamma(x) + \varepsilon(x - a)(x - b)$ (interpolation parabolique). P est comme g pseudo-dérivable deux fois sur $[a, b]$ et $P^{('')} \equiv 2\varepsilon$. P est aussi, comme g, continue sur $[a, b]$. Soit $c \in [a, b]$ tel que $P(c)$ est le maximum de P sur $[a, b]$. Si $c \in]a, b[$, alors, pour tout $h > 0$ tel que $[c - h, c + h] \subset [a, b]$, on a : $\Delta_2 P(h, c) \leqslant 0$ donc $P^{('')}(c) \leqslant 0$. Absurde !
Bilan : $c = a$ ou $c = b$. Il vient : $\forall x \in [a, b] \quad P(x) \leqslant P(a) = P(b) = 0$, ce qui donne en faisant tendre ε vers 0^+ $g(x) \leqslant \gamma(x)$. Le même raisonnement avec $\varepsilon < 0$ donne $\gamma \geqslant g$ sur $[a, b]$.
g, affine sur $[a, b]$, est C^2 sur $]a, b[$ avec $g'' = 0$, et ce pour tout $a < b$ dans $\mathbb{R}$, donc g est C^2 sur $\mathbb{R}$ avec $g'' = 0$. g est bien une application affine.

lemme

F est deux fois pseudo-dérivable sur $\mathbb{R}$ avec : $F^{('')} = f$.

preuve : Soit x fixé dans $\mathbb{R}$. Pour $h \in \mathbb{R}^*$, on écrit :

$\Delta_2 F(h, x) = \frac{a_0}{2} - \frac{1}{h^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}a_n Re(Z_{n,h,x}) + \frac{1}{n^2}b_n Im(Z_{n,h,x})$ où :

$Z_{n,h,x} = e^{in(x+h)} + e^{in(x-h)} - 2e^{inx} = e^{inx}[2\cos nh - 2] = -4\sin^2 \frac{nh}{2}\, e^{inx}$.

Il vient : $\Delta_2 F(h,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{nh}{2}}{[\frac{nh}{2}]^2} \rho_n(x)$

On pose :

- $u(t) = \frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}^2}$ pour $t \in \mathbb{R}^*$, $u(0) = 1$.
- $S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \rho_k(t)$, $S_0(t) = \frac{a_0}{2}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}$.

On vérifie que u est C^1 sur $[0, +\infty[$ avec :

$$u'(t) = \frac{2t \sin t - 4(1 - \cos t)}{t^3} \quad ; \quad u'(0) = 0.$$

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, par transformation d´Abel, on a : $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{p} u(nh)\rho_n(x)$
$= \frac{a_0}{2} - \frac{a_0}{2}u(h) + u(ph)S_p(x) + \sum_{n=1}^{p-1} (u(nh) - u((n+1)h)S_n(x)$
$= u(ph)S_p(x) + \sum_{n=0}^{p-1} (u(nh) - u((n+1)h)S_n(x)$

$(S_p(x))_{p \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $f(x)$ et on a : $0 \leqslant u(ph) \leqslant \frac{4}{p^2h^2}$
donc $\lim_{p \to +\infty} S_p(x)u(ph) = 0$, et donc $\sum (u(nh) - u((n+1)h)S_n(x)$ converge.
$\Delta_2 F(h,x)$ s´écrit alors :

$$\Delta_2 F(h,x) = \sum_{n=0}^{\infty} (u(nh) - u((n+1)h)S_n(x)$$

et puisque $\sum (u(nh) - u((n+1)h)$ converge de somme $u(0) = 1$, on a :

$$\Delta_2 F(h,x) - f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (u(nh) - u((n+1)h)(S_n(x) - f(x))$$

On vérifie que $\sum (u(nh) - u((n+1)h)(S_n(x) - f(x))$ est absolument convergente. Puisque $(S_n(x) - f(x))_{n \geqslant 0}$ est bornée, Il suffit de voir que $(u(nh))_{n \in \mathbb{N}}$ est à variation bornée, ie que la série $\sum \mid u(nh) - u((n+1)h) \mid$ converge. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mid u(nh) - u((n+1)h) \mid \leqslant \int_{nh}^{(n+1)h} \mid u' \mid$. Or : $\mid u'(t) \mid = \bigcirc(\frac{1}{t^2})$ en $+\infty$, donc $\int_0^{\to\infty} \mid u' \mid$ converge en $+\infty$ et par comparaison :
$\sum \mid u(nh) - u((n+1)h) \mid$ converge.

Soit $\varepsilon > 0$.

On choisit $p \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geqslant p + 1 \Rightarrow \mid S_n(x) - f(x) \mid \leqslant \varepsilon$.
Il vient : $\mid \sum_{n=p+1}^{\infty} (u(nh) - u((n+1)h)(S_n(x) - f(x)) \mid$
$\leqslant \varepsilon \sum_{n=p+1}^{\infty} \mid u(nh) - u((n+1)h) \mid \leqslant \varepsilon \int_0^{\infty} \mid u' \mid$.

On gère à présent le "terme à distance fini" ; pour $n = 0, 1, .., p$, et pour $h \in \mathbb{R}$, par accroissements finis : $(u(nh) - u((n+1)h)) = u'(c_h)$ avec $nh \leqslant c_h \leqslant (n+1)h$. On vérifie que : $u'(t) = \bigcirc(t)$ en 0, ce qui donne : $\lim_{h \to 0}(u(nh) - u((n+1)h))(S_n(x) - f(x)) = 0$, et ce pour tout $0 \leqslant n \leqslant p$.

En définitive : $\lim_{h \to 0} \Delta_2 F(h,x) = f(x)$.

d) conclusion On a montré que : $F^{(,,)} = f$ et : $\Phi^{(,,)} = \Phi'' = f$ donc : $(F - \Phi)^{(,,)} = 0$ ce qui prouve que $F - \Phi$ est affine. Ceci permet de dire que F est, comme Φ, de classe C^2 avec $F'' = f$. A présent, la série de Fourier de $x \mapsto F(x) - \frac{a_0}{4}x^2$ est $-\sum \frac{a_n}{n^2}\cos nx + \frac{b_n}{n^2}\sin nx$ donc la série de Fourier de sa dérivée seconde $x \mapsto f(x) - \frac{a_0}{2}$, obtenue par dérivation terme à terme, est $\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$. cqfd

Cinquième partie

Théorème de Poisson et applications

Pour $h \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\rho \in [0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$h * \mathcal{P}_\rho(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\mathcal{P}_\rho(x-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(x-t)\mathcal{P}_\rho(t)dt$$

avec, pour $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{P}_\rho(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \rho^{|n|}e^{int}$

Puisque h est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho^{|n|}e^{int}$ converge normalement en t sur $[0,2\pi]$, on peut écrire après interversion des signes de sommation :

$$h * \mathcal{P}_\rho(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \rho^{|n|}c_n(h)e^{inx}$$

1-théorème de Poisson

Enoncé : $h * \mathcal{P}_\rho(\bullet)$ converge uniformément vers h quand ρ tend vers 1^-.
Autrement dit : $\lim_{\rho\to 1^-} \parallel h * \mathcal{P}_\rho - h \parallel_\infty = 0$
Démonstration : en annexe

2-approximation de Weierstrass

Le but est de construire un polynôme trigonométrique uniformément et arbitrairement proche de $h \in \mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $0 < \rho < 1$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad | \, h(x) - h * \mathcal{P}_\rho(x) \, | \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

ρ étant fixé, $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{Z} \quad | \, \rho^{|n|}c_n(h)e^{inx} \, | \leqslant \rho^{|n|} \parallel h \parallel_\infty$
avec $\sum \rho^{|n|}$ convergente indépendemment de x, donc $\sum \rho^{|n|}c_n(h)e^{inx}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et $h * \mathcal{P}_\rho$ est limite uniforme des sommes partielles centrées. On choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \ | \sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho^{|n|}c_n(h)e^{inx} - \sum_{|n|\leqslant N} \rho^{|n|}c_n(h)e^{inx} \, | \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Par inégalité triangulaire : $\forall x \in \mathbb{R} \quad | \, h(x) - \sum_{|n|\leqslant N} \rho^{|n|}c_n(h)e^{inx} \, | \leqslant \varepsilon$
cqfd.

3-prolongement d´une fonction de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Problème : on se donne une fonction réelle continue sur S^1 ou de façon équivalente une fonction h de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Comment prolonger h en une fonction continue sur $\bar{D}$?

La formule de Poisson et son interprétation (page 7) suggèrent de poser :

$$H(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\frac{1-\mid z\mid^2}{\mid e^{it}-z\mid^2}dt \qquad (\mid z\mid< 1)$$

H est la partie réelle de $z \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)(1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-int}z^n)dt$
et comme on a : $\forall t \in [0,2\pi] \quad \mid h(t)e^{-int}z^n \mid\leqslant\parallel h\parallel_\infty \mid z\mid^n$,
H est la partie réelle de $z \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(t)e^{-int}dt]z^n$,
ce qui assure la continuité de H sur D.

Reste à voir pouquoi : $\forall\theta\in\mathbb{R} \quad H(z)\to h(\theta)$ quand $(z\to e^{i\theta} \ \mid z\mid<1)$

Soit : $\varepsilon>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$. Par continuité de h en θ, on choisit $\delta>0$ tel que :

$$\forall x\in]\theta-\delta,\theta+\delta[\qquad \mid h(x)-h(\theta)\mid\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

On utilise ensuite le théorème de Poisson.
On choisit en effet $\eta>0$ tel que :

$$\forall\rho\in]1-\eta,1[\quad \forall x\in\mathbb{R} \quad \mid h*\mathcal{P}_\rho(x)-h(x)\mid\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

Pour tout $z=\rho e^{ix}\in\{z\in\mathbb{C}\setminus\theta-\delta<Arg(z)<\theta+\delta \ et \ 1-\eta<\mid z\mid<1\}$,
$\mid H(z)-h(\theta)\mid=\mid h*\mathcal{P}_\rho(x)-h(\theta)\leqslant\mid h*\mathcal{P}_\rho(x)-h(x)\mid+\mid h(x)-h(\theta)\mid\leqslant\varepsilon$
d´où le résultat.

4-un résultat de convergence

Soit $f\in\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\sum a_n\cos nx+b_n\sin nx$ sa série de Fourier.
On suppose que $\sum\mid a_n\mid$ et $\sum\mid b_n\mid$ convergent.
Alors $\sum a_n\cos nx+b_n\sin nx$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

preuve : $\forall x\in\mathbb{R} \quad \mid a_n\cos nx+b_n\sin nx\mid\leqslant\mid a_n\mid+\mid b_n\mid$ *et* $\sum\mid a_n\mid+\mid b_n\mid$ converge donc la convergence uniforme de la série de Fourier de f est assurée par convergence normale. Reste à determiner la fonction-limite.

L´idée de la preuve, rencontrée pour l´étude de $\sum\frac{\sin nt}{t}$, illustre "la méthode de sommation d´Abel-Poisson". On regarde l´objet correctement défini :

$$S_{\rho,x}=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\rho^n \quad (x\in\mathbb{R},\rho\in[0,1])$$

A x fixé, on a : $\forall\rho \in [0,1] \quad | a_n \cos nx + b_n \sin nx | \rho^n \leqslant | a_n | + | b_n |$
donc la série entière $\sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\rho^n$ converge normalement, et par suite uniformément en ρ sur $[0,1]$, donc $\rho \mapsto S_{\rho,x} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\rho^n$, limite uniforme de fonctions continues, l´est aussi sur $[0,1]$.
(cas particulier du théorème d´Abel radial)

Bilan : $S_{\rho,x}$ tend vers $S_{1,x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ quand $\rho \to 1$.

Par ailleurs, à x fixé dans $\mathbb{R}$ et pour $\rho \in [0,1[$, on a :

$$S_{\rho,x} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\rho^n(\cos nx \cos nt + \sin nx \sin nt)dt$$

On a : $\forall t \in [0, 2\pi] \quad | f(t)\rho^n \cos n(x-t) | \leqslant \| f \|_\infty \rho^n$
donc, par convergence normale en t sur $[0, 2\pi]$, on peut écrire :

$$S_{\rho,x} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n(x-t))dt = f * \mathcal{P}_\rho(x)$$

Lorsque ρ tend vers 1^-, $S_{\rho,x}$ tend vers $f(x)$ (théorème de Poisson).

conclusion : pour tout réel x, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = f(x)$

5-Parseval dans $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

enoncé Pour $h \in \mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} | h |^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} | c_n(h) |^2}$$

preuve L´inégalité $| \, | h * \mathcal{P}_\rho(x) |^2 - | h(x) |^2 | = [| h * \mathcal{P}_\rho(x) | - | h(x) |]$ $[| h * \mathcal{P}_\rho(x) | + | h(x) |] \leqslant 2 \| h \|_\infty | h * \mathcal{P}_\rho(x) - h(x) |$ valable pour tout réel x et le théorème de Poisson assurent que $| h * \mathcal{P}_\rho(x) |^2$ converge uniformément vers $| h(x) |^2$ quand ρ tend vers 1^-. Ainsi, à bon droit,

$$lim_{\rho \to 1^-} \int_0^{2\pi} | h * \mathcal{P}_\rho |^2 = \int_0^{2\pi} | h |^2$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $0 < \rho < 1$, les séries $\sum \rho^{|n|} c_n(h) e^{inx}$ et $\sum \rho^{|n|} \overline{c_n(h)} e^{-inx}$ indéxées sur $\mathbb{Z}$ convergent absolument donc leur série-produit de Cauchy converge (absolument) aussi et :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{p+q=n} \rho^{|p|+|q|} c_p(h) \overline{c_q(h)} e^{i(p-q)x} = | h * \mathcal{P}_\rho(x) |^2$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$,
$\mid \sum_{p+q=n} \rho^{|p|+|q|} c_p(h)\overline{c_q(h)} e^{i(p-q)x} \mid \leqslant \parallel h \parallel_\infty^2 \sum_{p+q=n} \rho^{|p|+|q|}$
et $\sum_{p+q=n} \rho^{|p|+|q|}$, terme général de la série-produit de $\sum \rho^{|n|}$ par elle-même, est le terme général d´une série convergente indépendante de la variable x. Ainsi, par convergence normale en x,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid h * \mathcal{P}_\rho \mid^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{p+q=n} \rho^{|p|+|q|} c_p(h)\overline{c_q(h)} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(p-q)x} dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho^{|2n|} \mid c_n(h) \mid^2$$

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid h * \mathcal{P}_\rho \mid^2 \geqslant \sum_{n=-N}^{N} \rho^{|2n|} \mid c_n(h) \mid^2$. Les 2 membres ont une limite en 1^- et par passage à la limite, il vient :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid h \mid^2 \geqslant \sum_{n=-N}^{N} \mid c_n(h) \mid^2$$

Ceci montre que $(c_n(h))$ est un élément de l^2 (inégalité de Bessel-Parseval). Puisque $\forall \rho \in [0,1]$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\rho^{|2n|} \mid c_n(h) \mid^2 \leqslant \mid c_n(h) \mid^2$ et $(c_n(h)) \in l^2$, par convergence normale en ρ, $\rho \mapsto \sum_{-\infty}^{\infty} \rho^{|2n|} \mid c_n(h) \mid^2$ est continue sur $[0,1]$ d´où :

$$lim_{\rho\to 1^-} \sum_{-\infty}^{\infty} \rho^{|2n|} \mid c_n(h) \mid^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \mid c_n(h) \mid^2$$

Par unicité de la limite, on obtient l´egalité de Parseval pour $h \in \mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Sixième partie
convergence en moyenne quadratique

théorème

Pour $f \in \mathcal{D}$, $(S_p(f))_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $(\mathcal{D}, \|\quad\|_2)$ vers f
(en moyenne quadratique).

Soit $\varepsilon > 0$. $\mathcal{T}$ est dense dans $(\mathcal{D}, \|\quad\|_2)$ donc on choisit $y_\varepsilon = \sum_{k=-N}^{N} \lambda_k e_k$ tel que $\| f - y_\varepsilon \|_2 \leqslant \varepsilon$. La suite $(\mathcal{T}_p)_{p\geqslant 1}$ est croissante pour l´inclusion donc la suite $(\| f - S_p(f) \|_2)$ des distances de f à $\mathcal{T}_p$ décroit.
Ainsi, $\forall p \geqslant N \quad \| f - S_p(f) \|_2 \leqslant \| f - S_N(f) \|_2 \leqslant \| f - y_\varepsilon \|_2 \leqslant \varepsilon$.

exercice Soit $f \in \mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ non constante et invariante par la translation $x \mapsto x + h$ (cad $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + h) = f(x)$)
Alors nécessairement $\frac{h}{\pi}$ est rationnel.

$\tau_h(f) = f$ donc $\forall n \in \mathbb{Z} \quad (e^{inh} - 1)c_n(f) = 0$.
Puisque f n´est pas constante, on peut choisir $n_0 \in \mathbb{Z}^*$ tel que $c_{n_0}(f) \neq 0$.
(Sinon la suite $(S_p(f))_{p\in\mathbb{N}}$ est la suite constante $(c_0(f))$ qui converge en moyenne quadratique vers la fonction constante $x \mapsto c_0(f)$.
Impossible : par unicité de la limite, f serait constante)
On a alors : $e^{in_0h} - 1 = 0$; ce qui donne : $n_0 h = 0 \ (2\pi)$ cad $h = 0 \ (\frac{2\pi}{n_0})$ d´où $\frac{h}{\pi} \in \mathbb{Q}$

formule de Parseval

Avec la convergence de $(S_p(f))_{p\in\mathbb{N}}$ vers f en moyenne quadratique et la continuité de $\|\quad\|_2^2$, $\| S_p(f) \|_2^2 = | c_0 |^2 + \sum_{n=1}^{p} (| c_n |^2 + | c_{-n} |^2)$ tend vers $\| f \|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | f(t) |^2 \, dt$ quand p tend vers $+\infty$.
D´où la formule de Parseval :

$$\boxed{| c_0 |^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (| c_n |^2 + | c_{-n} |^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | f(t) |^2 \, dt}$$

ou :

$$\boxed{\frac{| a_0 |^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (| a_n |^2 + | b_n |^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | f(t) |^2 \, dt}$$

Cette égalité exprime la façon dont l´énergie correspondant au signal périodique f se répartit entre les différentes harmoniques.

application : unicité pour les développements en série de Fourier
$\Phi : f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est linéaire de $\mathcal{D}$ dans l^2. Si f est dans $ker(\Phi)$, d´après Parseval, on a : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(t) \mid^2\ dt = 0$. Soit $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant N}$ une subdivision adaptée à f, et pour chaque k dans $\{0,...,N-1\}$, g_k continue sur $[a_k, a_{k+1}]$ telle que $g_{|]a_k,a_{k+1}[} = f_{|]a_k,a_{k+1}[}$. Chaque $\int_{a_k}^{a_{k+1}} \mid g_k \mid^2$ est nulle, et avec $\mid g_k \mid^2$ continue positive, g_k est nulle sur $[a_k, a_{k+1}]$. f est donc nulle sur $[a, b]$ sauf éventuellement en les a_k. Comme f prend en chaque a_k la valeur "demi-somme des limites à droite et à gauche", f est identiquement nulle sur $[a, b]$. D´où l´injectivité de Φ et le résultat.

remarque Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2$. La suite $(S_p = \sum_{k=-p}^{p} c_k e_k)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $(\mathcal{D}, \|\ \ \|_2)$ (écrire pour $m < q$, $\| S_q - S_m \|_2^2 = \sum_{m<k\leqslant q} \mid c_k \mid^2$,..), mais le caractère non complet de $(\mathcal{D}, \|\ \ \|_2)$ ne permet pas d´affirmer que (S_p) converge. Ce qui laisse penser que Φ n´est pas surjective.

exercice Une égalité ultra-classique : $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

On évalue les coefficients de Fourier de la fonction $f : x \mapsto x$ sur $]-\pi, \pi[$, de valeur 0 aux bornes et 2π-périodique. On remarque que $c_0(f) = 0$ et pour $k \neq 0$, $c_k(f) = i\frac{(-1)^k}{k}$ (intégration par parties). L´égalité de Parseval donne alors : $\frac{\pi^2}{3} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ d´où le résultat.

exercice Une inégalité classique - Wirtinger
enoncé : si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique, continue, C^1 par morceaux et de valeur moyenne nulle, alors on a :

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \mid f(x) \mid^2\ dx \leqslant \int_0^{2\pi} \mid f'(x) \mid^2\ dx}.$$

preuve : On sait que $c_n(f') = inc_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Via l´égalité de Parseval, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid f \mid^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \mid c_n(f) \mid^2$ et $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid f' \mid^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} n^2 \mid c_n(f) \mid^2$ d´où le résultat.

Septième partie

c_n et la convolution dans $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

1-définition

Pour f, g dans $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt$$

On définit ainsi correctement une application $f * g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$
appelée "convolée de f par g".

2-premières propriétés

$*$ est une loi de composition interne de $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, commutative par changement de variable et intégrale de période, et bilinéaire continue pour la norme $\| \quad \|_\infty$ (On vérifie facilement que $\| f * g \|_\infty \leqslant \| f \|_\infty \| g \|_1 \leqslant \| f \|_\infty \| g \|_\infty$)
On a aussi par changement de variables et intégrale de période,
$\| f * g \|_1 \leqslant \| f \|_1 \| g \|_1$.

3-associativité de $*$

On peut démontrer l´associativité de $*$ avec Fubini puis, grâce au jeu d´écritures $c_n(.) = . * e_n(0)$, $e_n * e_n = e_n$, $. * e_n = c_n(.)e_n$ et à la commutativité de $*$, montrer que $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$.
On procède ici différemment : on prouve par densité-fermeture que
$c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$ et on récupère en corollaire l´associativité de $*$.

Soit g fixé dans $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $V = \{f \in \mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \setminus c_0(f * g) = c_0(f)c_0(g)\}$

•V est le noyau de la forme linéaire $\delta : f \to c_0(f * g) - c_0(f)c_0(g)$ donc V est un sev de $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. V contient la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ donc V est dense dans $(\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \| \quad \|_\infty)$.
•Pour $f \in \mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $| c_0(f*g) - c_0(f)c_0(g) | \leqslant | c_0(f*g) | + | c_0(f) | | c_0(g) |$
$\leqslant ||| c_0 ||| \, \| f \|_\infty \| g \|_\infty + ||| c_0 ||| \, \| f \|_\infty | c_0(g) |$
$\leqslant [||| c_0 ||| \, \| g \|_\infty + | c_0(g) |] \, \| f \|_\infty$
donc la forme linéaire δ est continue, donc le sev dense V est fermé dans $(\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \| \quad \|_\infty)$, d´où $V = \mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

On écrit : $c_n(.) = c_0(. * e_{-n})$ et $f * ge_{-n} = fe_{-n} * ge_{-n}$ donc
$c_n(f * g) = c_0(f * ge_{-n}) = c_0(fe_{-n})c_0(ge_{-n}) = c_n(f)c_n(g)$

corollaire : pour f, g et h dans $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $(f * g) * h$ et $f * (g * h)$ ont les mêmes coefficients de Fourier complexes donc, d´après Parseval, on a $(f * g) * h = f * (g * h)$.

4-unité et idempotent dans $(\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}),*)$

•Si μ est une unité de $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ pour $*$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $e_n*\mu=e_n$ donc $c_n(e_n)c_n(\mu)=c_n(e_n)=1$, donc $c_n(\mu)=1$. Impossible car d´après Riemann-Lebesgue, $c_n(\mu)\to 0$ en $+\infty$

•Si β est un idempotent de $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, la suite $(c_n(\beta)$ est à valeurs dans $\{0,1\}$ donc toujours par Riemann-Lebesgue, $S_p(\beta)_{p\geqslant 0}$ est stationnaire. Par unicité de la limite dans $(\mathcal{D},\|\quad\|_2)$, β apparait comme un polynome trigonométrique à coefficients dans $\{0,1\}$. Réciproquement, toute somme finie de e_k est un idempotent.

5-convolution associée à un noyau

On se donne dans $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ une fonction paire à valeurs réelles notée k. L´application $K:f\mapsto f*k$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et l´inégalité $\parallel K(f)\parallel_\infty\leqslant\parallel k\parallel_1\parallel f\parallel_\infty$ valable pour tout f de $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ montre que l´opérateur K est continu pour la norme uniforme avec : $|||\ K\ |||\leqslant\parallel k\parallel_1$.

On se propose de montrer : $|||\ K\ |||=\parallel k\parallel_1$

On essaie d´exhiber un élément f_0 de $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ pour lequel $\parallel K(f_0)\parallel_\infty=\parallel k\parallel_1\parallel f_0\parallel_\infty$. On a envi de poser : $f_0=sg(k)$ où $sg(k)$ est l´application "signe de k". Le problème de la continuité se pose.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $f_n=\frac{k}{|k|+\frac{1}{n}}$
(f_n) est une suite de points de $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ qui converge simplement vers $sg(k)$.

On a : $K(f_n)(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_n(-t)k(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{k^2(t)}{|k(t)|+\frac{1}{n}}dt$ car k est paire
et $K(f_n)(0)\ \leqslant\parallel K(f_n)\parallel_\infty\leqslant|||\ K\ |||\parallel f_n\parallel_\infty\leqslant|||\ K\ |||$

On veut prouver que $K(f_n)(0)$ tend vers $\parallel k\parallel_1$ en $+\infty$.
On aura alors l´inégalité $\parallel k\parallel_1\leqslant|||\ K\ |||$ et le résultat.
Il suffit de vérifier que $(\frac{k^2}{|k|+\frac{1}{n}})$ converge uniformément vers $|\ k\ |$ sur $[0,2\pi]$.

Pour $t\in[0,2\pi]$ tel que $k(t)\neq 0$,
$\Delta_n(t)=\left|\frac{k^2(t)}{|k(t)|+\frac{1}{n}}-|\ k(t)\ |\right|=\left|\frac{k^2(t)}{|k(t)|+\frac{1}{n}}-\frac{k^2(t)}{|k(t)|}\right|\leqslant\frac{|-\frac{1}{n}k^2(t)|}{|k(t)|(|k(t)|+\frac{1}{n})}$
$\leqslant\frac{1}{n}\frac{|k(t)|}{|k(t)|+\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}$
L´inégalité $\Delta_n(t)\leqslant\frac{1}{n}$ est aussi valable pour t zéro de k, d´où le résultat.

a) l´opérateur σ_n

$$\boxed{|||\ \sigma_n\ |||=\parallel F_n\parallel_1=1}$$

Fejer par densité-fermeture On pose :

$$W = \{f \in \mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \backslash \parallel \sigma_n(f) - f \parallel_\infty \to 0\}$$

• W est un sev de $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

• Pour $p \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$
$\sigma_n(e_p) = e_p * F_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} e_p * D_k$
$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=-k}^{k} \delta_{p,m} e_m$
$\sigma_n(e_p) = \frac{1}{n+1} e_p \sum_{|p| \leqslant k \leqslant n} 1 = \frac{n-|p|+1}{n+1} e_p$
donc $\parallel \sigma_n(e_p) - e_p \parallel_\infty \leqslant \frac{|p|}{n+1}$, donc $e_p \in W$
donc W contient $\mathcal{T}$, donc W est dense dans $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

• On considère une suite (f_p) de W qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers un élément de $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ noté f. Pourquoi a-t-on : $f \in W$?

On choisit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\parallel f_p - f \parallel_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.
On choisit ensuite $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant N \Rightarrow \parallel \sigma_n(f_p) - f_p \parallel_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.
On remarque que : $\parallel \sigma_n(f_p) - \sigma_n(f) \parallel_\infty \leqslant ||| \sigma_n ||| \parallel f_p - f \parallel_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ et on conlut enfin par une découpe en trois.

W est un sev de $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, dense et fermé dans $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$
donc $W = \mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
remarque : un argument incontournable de cette preuve est le caractère borné de $(||| \sigma_n |||)$. On retrouve la même idée avec :

b) l´opérateur $\bullet * \mathcal{P}_\rho$

$$\boxed{||| \bullet * \mathcal{P}_\rho ||| = \parallel \mathcal{P}_\rho \parallel_1 = 1}$$

Poisson par densité-fermeture Remarquer que
$\forall p \in \mathbb{Z} \quad e_p * \mathcal{P}_\rho = \rho^{|p|} e_p$ de sorte que $e_p * \mathcal{P}_\rho(x)$ tend vers $e_p(x)$ uniformément par rapport à x quand ρ tend vers 1, puis reprendre la preuve ci-dessus.

c) l´opérateur $\mathcal{S}_n$

$$\boxed{||| S_n ||| = \parallel D_n \parallel_1 \sim \frac{4}{\pi^2} \ln n}$$

• transformation d´ecritures

$2\pi \parallel D_n \parallel_1 = \int_{-\pi}^{\pi} | \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} | \, dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} | \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} | \, du$
par parité et changement de variable.

• enlever à l´intégrande sa partie principale.

Soit ϕ la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $\phi(u) = \frac{1}{\sin u} - \frac{1}{u}$ si $u \neq 0$ et $\phi(0) = 0$. ϕ est continue positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mid \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} \mid du = \underbrace{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(u) \mid \sin(2n+1)u \mid du}_{\leqslant \frac{\pi}{2} \|\phi\|_\infty} + \underbrace{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mid \sin(2n+1)u \mid}{u} du}_{=\mu_n}$

• encadrer $\mu_n = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv$ pour en obtenir un équivalent.

On écrit : $\mu_n \leqslant \int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv$
et : $\mu_n \geqslant \int_0^{n\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv = \int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv$

On a : $\int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv = \int_0^{\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv + \sum_{k=1}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv$
$\leqslant \int_0^{\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \mid \sin v \mid dv$
$\leqslant \underbrace{\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mid \sin v \mid}{v} dv + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k\pi}}_{\sim \frac{2}{\pi} \ln n}$
et : $\int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \mid \sin v \mid dv \sim \frac{2}{\pi} \ln n$
donc : $\int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv \sim \frac{2}{\pi} \ln n$

Avec $0 \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv \leqslant \frac{2}{n\pi}$ et donc avec $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv = O(\frac{1}{n})$, on a aussi : $\int_0^{n\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv \sim \frac{2}{\pi} \ln n$.

• bilan : $\mu_n \sim \frac{2}{\pi} \ln n$ (cf page 36) et $\| D_n \|_1 \sim \frac{4}{\pi^2} \ln n$

un peu de Baire (cf annexe 2 page 71)

On se pose les deux questions suivantes ;

problème 1 : $\Phi : f \mapsto (c_n(f))$ de $(\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \| \quad \|_\infty)$ dans (l_0^∞, N_∞) est linéaire, continue et injective (unicité des développements en série de Fourier dans $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$). A-t-on Φ surjective ?
La réponse est NON ; Si tel est le cas, par le théorème de l´application ouverte, Φ^{-1} est continue d´où : $\| \quad \|_1 \leqslant \| \quad \|_\infty \leqslant c\, N_\infty$ avec $c \in \mathbb{R}$. En particulier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, avec $D_n \in \mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\| D_n \|_1 \leqslant c$. Contradiction !

problème 2 : pour $f \in \mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, la série de Fourier de f converge-t-elle vers $f(x)$ en tout point x ?
La réponse est NON ; Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $l_n : f \mapsto S_n(f)(0)$ est une forme linéaire continue sur le Banach $(\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \| \quad \|_\infty)$ et $||| l_n ||| = \| D_n \|_1$ (cf page 53). Par le théorème de Banach-Steinhaus, puisque $(||| l_n |||)$ est non bornée, on peut trouver $f \in \mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que : $\forall M > 0\ \exists n \in \mathbb{N}^* \quad \mid S_n(f)(0) \mid > M$.
$(S_n(f)(0))$ n´est pas bornée donc ne converge pas.

Huitième partie
convergence simple

A - un résultat de convergence, une jolie preuve

enoncé Soit $f \in \mathcal{D}$ et $a \in \mathbb{R}$. Si f est dérivable en a, alors la suite $(S_n(f)(a)$ converge vers $f(a)$.

preuve Quitte à remplacer f par $\tau_{-a}f$, puis f par $f - f(a)$, on peut supposer : $f(a) = a = 0$. On envisage la fonction g définie sur $[-\pi, \pi]$ par $g(x) = \frac{i\,f(x)}{e^{ix}-1}$ si $x \neq 0$, $g(0) = f'(0)$. g est continue en 0 et continue par morceaux sur $[-\pi, 0[\cup]0, \pi]$. On prolonge g par 2π-périodicité, g est alors un élément de $\mathcal{D}$. Pour $x \in [-\pi, \pi]$, $i\,f(x) = g(x)e^{ix} - g(x)$ donc pour $k \in \mathbb{Z}$, $ic_k(f) = c_{k-1}(g) - c_k(g)$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(f)(0) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) = \frac{1}{i}\sum_{-n}^{n} c_{k-1}(g) - c_k(g)$ donc : $S_n(f)(0) = \frac{1}{i}[c_{-n-1}(g) - c_n(g)]$. Par Riemann-Lebesgue, le second membre tend vers $f(0) = 0$ quand n tend vers $+\infty$.

La dérivabilité est, comme on vient de le voir, une condition suffisante pour la convergence simple. Ce n´est pas une condition nécessaire.

B - une fonction non dérivable en 0 avec $\lim_{n\to\infty} S_n(f)(0) = f(0)$

La série de fonctions $\sum \frac{\sin nx}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. On en déduit :
• La fonction-somme notée f est continue sur $\mathbb{R}$.
• f, par ailleurs 2π-périodique comme chaque somme partielle de la série, a les coefficients de Fourier : $b_n = \frac{1}{n^2} \qquad n \in \mathbb{N}^*$
En vertu du résultat 4 page 27 ou de l´application 4 page 47, la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f, ce qui assure largement : $\lim_{n\to\infty} S_n(f)(0) = f(0)$.

Reste à voir que f n´est pas dérivable en 0. La stratégie consiste à minorer le quotient $\frac{f(x)}{x}$ pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ par une quantité qui diverge vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0^+. La minoration repose sur une "decoupe-variable", une transformation d´Abel, et une inégalité de convexité ultra-classique .

Pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on écrit : $\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{nx}\frac{1}{n} + \frac{1}{x}\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$
Si on choisit $N = E(\frac{\pi}{2x})$, grâce à l´inégalité de Jordan $\sin u \geqslant \frac{2}{\pi}u$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, le "terme à distance finie" $\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{nx}\frac{1}{n}$ est minoré par $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$

Pour la gestion du "reste", une transformation d´Abel donne :
$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \sigma_n(x)[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}]$ où $\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin kx$ est majoré en valeur absolue par $\mid \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} \mid$, par $\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$, et donc avec Jordan,

par $\frac{\pi}{x}$. En définitive : $\frac{f(x)}{x} \geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \frac{\pi}{N^2x^2}$.
$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0, et l´encadrement $N \leqslant \frac{\pi}{2x} \leqslant N+1$ donne : $N^2x^2 \to_{0^+} \frac{\pi^2}{4}$, ce qui termine la preuve de la non-dérivabilité de f en 0.

C - théorème de Dirichlet

enoncé Soit f 2π-périodique et C^1 par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
Alors, pour $x \in \mathbb{R}$, $(S_n(f)(x))_{n\geqslant 1}$ converge vers $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$

preuve On rappelle que : $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)du = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}du = 1$
et : $S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}du \qquad (n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R})$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$\epsilon_n(x) = S_n(f)(x) - \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$
$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{[f(x+u)-f(x+0)+f(x-u)-f(x-0)]}{\sin\frac{u}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})udu.$

On définit l´application g de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{C}$ comme suit :
$g(u) = \frac{[f(x+u)-f(x+0)+f(x-u)-f(x-0)]}{\sin\frac{u}{2}}$ si $u \in]0,\pi]$ et, à bon droit puisque f est C^1 par morceaux, $g(0) = 2\,[f'(x+0)+f'(x-0)]$
g est comme f C^1 par morceaux sur $]0,\pi]$, donc en particulier continue par morceaux sur $]0,\pi]$. Par ailleurs, pour $u \neq 0$,
$\frac{[f(x+u)-f(x+0)+f(x-u)-f(x-0)]}{\sin\frac{u}{2}} = 2\{\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u} + \frac{f(x-u)-f(x-0)}{u}\}\frac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}$ donc $g(u)$ tend vers $2\,[f'(x+0)+f'(x-0)]$ quand u tend vers 0. g est donc continue en 0, et par Riemann-Lebesgue d´emploi justifié puisque g est maintenant continue par morceaux sur $[0,\pi]$, $\epsilon_n(x)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

remarque 1 Lorsque f est un élément de $\mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f (cf page 22).

remarque 2 On pourrait multiplier les exercices qui consistent à calculer, pour une fonction C^1 par morceaux de $\mathcal{D}$, les a_n, b_n, c_n afin d´obtenir avec Dirichlet des égalités amusantes. En voici deux exemples.

exercice - formule d´Euler Pour $\alpha \in \mathbb{R}_{\backslash 2\pi\mathbb{Z}}$, c_α désigne l´application 2π-périodique définie sur $]-\pi,\pi[$ par $c_\alpha(x) = \cos(\alpha x)$.
A l´aide du développement en série de Fourier de c_α, montrer que :

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}_{\backslash\mathbb{Z}} \quad cotan(\pi\alpha) = \frac{2}{\pi}\alpha\{\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2-n^2}\}}$$

puis que :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[_{\setminus\{0\}} \quad (\pi x) cotan(\pi x) = 1 - 2\sum_{p=0}^{\infty} \zeta(2p+2)x^{2p+2}}$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}_{\setminus 2\pi\mathbb{Z}}$, c_α est paire. Ses coefficients de Fourier a_n ($n \in \mathbb{N}$) s´obtiennent soit par linéarisation des produits trigonométriques, soit par double intégration par parties. En tout cas : $a_n = \frac{1}{\pi}\frac{2\alpha(-1)^n \sin\pi\alpha}{\alpha^2-n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0 = \frac{2\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}$. c_α est C^1 par morceaux donc la formule de Dirichlet appliquée en π donne : $\cos\pi\alpha = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha} + 2\alpha\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2-n^2}$
donc : $cotan(\pi\alpha) = \frac{2}{\pi}\alpha\{\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2-n^2}\}$

Pour $x \in]-1,1[$, $x \neq 0$, $cotan(\pi x) = \frac{2}{\pi}x\{\frac{1}{2x^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{x^{2p}}{n^{2p+2}}\}$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on écrit : $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{x^{2p}}{n^{2p+2}} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{k} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=k+1}^{\infty}$
$= \sum_{p=0}^{k}\zeta(2p+2)x^{2p} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=k+1}^{\infty}}_{r_k(x)}$
L´inégalité $\mid r_k(x) \mid \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{p=k+1}^{\infty}x^{2p} = \zeta(2)\frac{x^{2k+2}}{1-x^2}$ donne :
$\lim_{k\to+\infty} r_k(x) = 0$. Par ailleurs, pour $p \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \zeta(2p+2)x^{2p} \leqslant \zeta(2)x^{2p}$, donc par comparaison, $\sum\zeta(2p+2)x^{2p+2}$ converge. On fait tendre k vers $+\infty$, on obtient : $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{x^{2p}}{n^{2p+2}} = \sum_{p=0}^{\infty}\zeta(2p+2)x^{2p+2}$ et la conclusion est aisée.

remarque : par division suivant les puissances croissantes des développements limités en 0 de $t \mapsto t\cos t$ et $t \mapsto \sin t$ à l´ordre 9 (par exemple), on obtient : $t\,cotan(t) = 1 - \frac{t^2}{3} - \frac{t^4}{45} - \frac{2t^6}{945} - \frac{2t^8}{9450} + \circ(t^8)$ ce qui donne : $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$.

exercice Soit g 2π-périodique, impaire définie sur $[0,\pi]$ par $g(x) = \frac{\pi-1}{2}x$ si $x \in [0,1]$, $g(x) = \frac{\pi-x}{2}$ si $x \in [1,\pi]$. Etablir avec g :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(t)\sin nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^1(\pi-1)t\sin nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_1^\pi(\pi-t)\sin nt\,dt$.
Par intégrations par parties, il vient :
$b_n(g) = \frac{\pi-1}{\pi}\{-\frac{\cos n}{n} + \frac{\sin n}{n}\} + \frac{1}{\pi}\{(\pi-1)\frac{\cos n}{n} + \frac{\sin n}{n^2}\} = \frac{\sin n}{n^2}$.
g étant C^1 par morceaux, par Dirichlet : $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}\sin nx$.
En particulier : $g(1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2} = \frac{\pi-1}{2}$ cqfd.

remarque : voici pour le plaisir une autre façon d´obtenir l´égalité.

On sait que : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{1}{2}(\pi - x)$ si $0 < x < 2\pi$ avec convergence uniforme compacte de la série de sinus sur $]0, 2\pi[$. (cf page 11)
Si C désigne l´application $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, C est paire, 2π-périodique et continue par convergence uniforme (normale) sur $\mathbb{R}$; Par dérivation terme à terme licite, on a : $C'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{1}{2}(x - \pi)$ sur $]0, 2\pi[$. D´où l´existence de $K \in \mathbb{R}$ telle que : $C(x) = K + \frac{x^2}{4} - \frac{\pi}{2}x$ si $0 < x < 2\pi$. On a : $K = C(0+0) = C(0) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$
d´où pour $0 < x < 2\pi$, $C(x) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{x^2}{4} - \frac{\pi}{2}x$.
En particulier, $C(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2\sin^2 n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + 1 - \pi$
donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2} = \frac{\pi-1}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$

égalité dans l´inégalité de Wirtinger (cf p.51)
Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue, 2π-périodique, C^1 par morceaux, de valeur moyenne nulle, il y a égalité dans $\int_0^{2\pi} | f |^2 \leqslant \int_0^{2\pi} | f' |^2$
ssi $\exists (a,b) \in \mathbb{C}^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a\cos x + b \sin x$.

preuve : l´inégalité de Wirtinger ne peut devenir une égalité que si $c_n(f)$ est nul pour $| n | \geqslant 2$. Or, avec f C^1 par morceaux et donc avec le théorème de Dirichlet, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{inx}$, ce qui laisse ici : $f(x) = a\cos x + b\sin x$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

application : soit $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ un arc géométrique (confusion entre α et sa trace $\alpha([0,1])$ dans $\mathbb{R}^2$), fermé ($\alpha(0) = \alpha(1)$), simple (pas d' auto-intersection, α injective), C^1 et régulier ($\forall v \in [0,1]$ $\alpha'(v) \neq 0$), de longueur $l = \int_0^1 | \alpha'(v) | dv$.

Théorème des isopérimètres : si λ désigne l´aire du domaine intérieur, on a l´inégalité : $\lambda \leqslant \frac{l^2}{4\pi}$, avec égalité lorsque α est un cercle. Autrement dit, à périmètre fixé et sous certaines hypothèses de régularité, le cercle est la boucle délimitant l´aire maximale.

On définit $s : v \mapsto \int_0^v | \alpha'(u) | du$ de $[0,1]$ dans $[0,l]$ (s est une abscisse curviligne sur α). s est dérivable de dérivée $| \alpha' |$ (continuité de $| \alpha' |$), strictement croissante de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ ($| \alpha' | > 0$) et s' ne s´annule pas sur $[0,1]$ donc s est un C^1-difféomorphisme strictement croissant de $[0,1]$ dans $[0,l]$ avec $(s^{-1})' = \frac{1}{s' \circ s^{-1}} = \frac{1}{|\alpha'| \circ s^{-1}}$. Pour se ramener au segment $[0, 2\pi]$, on introduit un nouveau paramètre $h_{\frac{2\pi}{l}} : s \mapsto t = \frac{2\pi}{l}s$ de $[0,l]$ dans $[0,2\pi]$, de bijection réciproque $h_{\frac{2\pi}{l}}^{-1} = h_{\frac{l}{2\pi}}$. A présent, pour le même arc, on dispose de 3 paramétrages α, $\beta = \alpha \circ s^{-1}$, $\gamma = \beta \circ h_{\frac{l}{2\pi}}$.
On munit $\mathbb{R}^2$ d´un repère orthonormé. Le point courant $\gamma(t) \quad (t \in [0, 2\pi])$ de l´arc a pour coordonnées $(x(t), y(t))$. On admet que :

$$2\lambda = \left| \int_0^{2\pi} (xy' - yx')(t) dt \right|$$

On a : $2\lambda \leqslant (\int_0^{2\pi} x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\ (\int_0^{2\pi} x'^2+y'^2)^{\frac{1}{2}}$ avec Cauchy-Scharwz. Quitte à effectuer une translation, précisément remplacer x par $x - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x$ et y par $y - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y$, on ramène le centre de gravité de la surface délimitée par γ en l´origine du repère, ie on suppose que : $\int_0^{2\pi} x = \int_0^{2\pi} y = 0$. Grâce à Wirtinger, $2\lambda \leqslant \int_0^{2\pi} (x'^2+y'^2)(t)dt$ avec $\int_0^{2\pi} (x'^2+y'^2)(t)dt = \int_0^{2\pi} \mid \gamma'(t) \mid^2 dt$
$= \int_0^{2\pi} \mid \beta'[h_{\frac{l}{2\pi}}(t)]\,(h_{\frac{l}{2\pi}})'(t) \mid^2 dt = \int_0^{2\pi} \mid \alpha'[s^{-1}(h_{\frac{l}{2\pi}}(t))](s^{-1})'[h_{\frac{l}{2\pi}}(t)]\frac{l}{2\pi} \mid^2 dt$
$= \frac{l^2}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} dt = \frac{l^2}{2\pi}$

Si on veut une égalité, il faut : $x = a\cos t + b\sin t$; $y = \alpha\cos t + \beta\sin t$ et $x^2+y^2 = \mu(x'^2+y'^2)$ (égalité dans Cauchy-Scharwz) avec $\mu = 1$ afin que : $\int_0^{2\pi} x^2+y^2 = \int_0^{2\pi} x'^2+y'^2$. cela donne : $a^2+\alpha^2 = b^2+\beta^2$ et $ab+\alpha\beta = 0$ et finalement : $x^2+y^2 = C$, $C = a^2+\alpha^2$. cqfd.

Neuvième partie
convergence normale, uniforme

Quelles hypothèses de régularité raisonnables mettre sur $f \in \mathcal{D}$ pour que $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers$f$ sur $\mathbb{R}$?
• La convergence uniforme entrainant la convergence simple, on peut raisonnablement imposer à f d´être C^1 par morceaux (cf Dirichlet)
• Les $S_n(f)$ étant continues, leur éventuelle limite uniforme l´est aussi, d´où l´idée d´imposer à f d´être continue.

A]propriété

1-enoncé Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique, continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f.

preuve : on sait déjà que $(c_n(f))$ est un élément de l^1, ce qui assure la convergence normale de la série de Fourier de f sur $\mathbb{R}$. Soit g la fonction somme. g est 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$ donc appartient à $\mathcal{D}$. L´inégalité $\| \quad \|_2 \leqslant \| \quad \|_\infty$ montre que $(S_p(f))$ converge en moyenne quadratique vers g. Par unicité de la limite dans $(\mathcal{D}, \| \quad \|_2)$, on a $f = g$.

2-condition suffisante vs condition nécessaire
$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ (cf page 56) définit sur $\mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique, continue, mais *non* C^1 *par morceaux* et pour laquelle cependant la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.

Justification rapide : la série de fonctions $\sum \frac{\cos nx}{n}$ converge uniformément sur tout intervalle du type $[\delta, \pi]$ avec $0 < \delta < \pi$, donc f est dérivable sur $]0, \pi]$, sa dérivée en tout x de $]0, \pi]$ étant $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$. Or pour $x \in]0, \pi]$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln(2 \sin \frac{x}{2})$ (cf page 11). Il vient :
$f'(x) \sim_{0^+} -\ln x$. ce qui donne : $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$ et assure que f n´est pas C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. On pourrait prouver l´équivalence
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \sim_{0^+} -\ln x$, comme à la page 12, en posant $N = E(\frac{1}{x})$ et en écrivant $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1-\cos nx}{n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$.

3-quelques normes sur l´espace des fonctions de classe C^1.
On dispose déjà sur $\mathcal{C}^1_{2\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des normes $\| \quad \|_\infty$, $\| \quad \|_1$, $\| \quad \|_2$, avec les inégalités : $\quad \| \quad \|_1 \leqslant \| \quad \|_2 \leqslant \| \quad \|_\infty$

Pour $\alpha \in \{1, 2, \infty\}$ et $f \in \mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $N_\alpha(f)$ désigne la norme de $(c_n(f))$ élément de l^α. Les N_α sont des normes sur $\mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. En effet, par unicité des développements de Fourier, la propriéte [$N_\alpha(f) = 0 \Rightarrow f = 0$] est

vérifiée alors que l´homogénéité et l´inégalité triangulaire pour N_α reposent sur la linéarité des c_n.
•La formule de Parseval donne $N_2 = \|\quad\|_2$
•Pour $f \in \mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a : $| c_n(f) | \leqslant \| f \|_1$ donc : $N_\infty \leqslant \|\quad\|_1$
•Pour $f \in \mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $\| S_n(f) \|_\infty \leqslant \sum_{k=-n}^{n} | c_k(f) | \leqslant N_1(f)$.
f étant continue et C^1 par morceaux, la série de Fourier de f converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f. On fait tendre n vers $+\infty$ et on obtient $\|\quad\|_\infty \leqslant N_1$

Pour $f \in \mathcal{C}^1_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on pose : $N(f) = \| f \|_1 + \| f' \|_1$. N est clairement une norme sur $\mathcal{C}^1_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. On propose de montrer que $\|\quad\|_\infty \leqslant 2(\pi+2)N$.

L´inégalité souhaitée peut s´obtenir en contrôlant les sommes de Fourier, puis en passant à la limite. Sa forme montre qu´il faut faire intervenir la dérivée f', élément de $\mathcal{C}_{2\Pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on a : $S_n(f)(x) = c_0(f) + 2\, f' * G_n(x)$ (page 22)
donc $| S_n(f)(x) | \leqslant \| f \|_1 + 2\ \| G_n \|_\infty \| f' \|_1 \leqslant 2(\pi+2)[\ \| f \|_1 + \| f' \|_1\ ]$
Par convergence uniforme de $S_n(f)$ vers f sur $\mathbb{R}$, on obtient en passant à la limite :

$$\|\quad\|_\infty \leqslant\ 2(\pi+2)N$$

B]forme des $\zeta(2l)$, $l \in \mathbb{N}^*$

lemme On a vu (page 59) : $\forall x \in [0,\pi] \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx-2\frac{\pi}{2})}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi}{2}x-\frac{x^2}{4}$.
On veut :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \neq 0,\ k \neq 1,\ \forall x \in [0,\pi] \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx-k\frac{\pi}{2})}{n^k} = \sum_{i=0}^{k} a_{i,k}\pi^{k-i}x^i$$

où les $a_{i,k}$ sont des nombres rationnels.

preuve On suppose la propriété vraie au rang k. Pour $x \in [0,\pi]$, la série de fonctions continues $\sum \frac{\cos(nx-k\frac{\pi}{2})}{n^k}$ converge normalement, donc uniformément sur $[0,x]$ donc : $\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt-k\frac{\pi}{2})}{n^k}dt = \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{\sin(nx-k\frac{\pi}{2}}{n^{k+1}} + \frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{n^{k+1}}]$
$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{n^{k+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[nx-(k+1)\frac{\pi}{2}]}{n^{k+1}}$
Par ailleurs, $\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt-k\frac{\pi}{2})}{n^k}dt = \sum_{i=1}^{k+1} a_{i,k+1}\pi^{k+1-i}x^i$
avec : $a_{1,k+1} = a_{0,k}$ et $a_{i,k+1} = \frac{a_{i-1,k}}{i} \quad (2 \leqslant i \leqslant k+1)$.
De là : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[nx-(k+1)\frac{\pi}{2}]}{n^{k+1}} = \sum_{i=0}^{k+1} a_{i,k+1}\pi^{k+1-i}x^i$
où : $a_{0,k+1} = -\frac{1}{\pi^{k+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{n^{k+1}}$.
Pour $1 \leqslant i \leqslant k+1$, $a_{i,k+1} = \frac{a_{i-1,k}}{i} \in \mathbb{Q}$.
Reste à voir que $a_{0,k+1}$ est un rationnel.

Si k est pair, $a_{0,k+1} = 0$. On suppose k impair, $k = 2l-1$.

Pour $x \in [0,\pi]$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{n^{k+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[nx-(k+1)\frac{\pi}{2}]}{n^{k+1}} = \sum_{i=1}^{k+1} a_{i,k+1}\pi^{k+1-i}x^i$ donc en particulier pour $x=\pi$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{n^{k+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(k+1)\frac{\pi}{2}}{n^{k+1}} = \pi^{k+1}\varsigma$ avec : $\varsigma = \sum_{i=1}^{k+1} a_{i,k+1} \in \mathbb{Q}$. En séparant dans la deuxième somme les indices pairs et impairs : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{n^{k+1}} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{2^{k+1}p^{k+1}} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{(2p+1)^{k+1}} = \pi^{k+1}\varsigma$
donc : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{n^{k+1}} - 2\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{2^{k+1}p^{k+1}}$
$+ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{2^{k+1}p^{k+1}} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{(2p+1)^{k+1}} = \pi^{k+1}\varsigma$.
De là : $(2-\frac{2}{2^{k+1}})\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{n^{k+1}} = \pi^{k+1}\varsigma$. Ainsi, $a_{0,k+1} = \frac{-\varsigma}{2-\frac{2}{2^{k+1}}} \in \mathbb{Q}$.

au passage En remplaçant k par $2l-1$, il vient : $\zeta(2l) = \underbrace{(-1)^l a_{0,2l}}_{\in\mathbb{Q}}\pi^{2l}$

Dixième partie

A propos des fonctions harmoniques (cf RMS5-1995)

U désigne un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, identifié à $\mathbb{R}^2$, H est une fonction C^2 de U dans $\mathbb{R}$. Pour $(x, y) \in U$, on pose :

$$\Delta_H(x, y) = \frac{\partial^2 H}{\partial^2 x}(x, y) + \frac{\partial^2 H}{\partial^2 y}(x, y)$$

Δ_H est appelé laplacien de H sur U.
On dit que H est harmonique sur U lorsque Δ_H est nul sur U.

Pour $a \in U$ et $\rho > 0$ tel que $D(a, \rho) \subset U$, on définit l´application G de $[0, \rho[\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $G(r, \theta) = H(a + re^{i\theta})$

A] deux lemmes.

Laplacien en coordonnées polaires Pour $(r, \theta) \in]0, \rho[$,
$\Delta_H(a + re^{i\theta}) = \frac{\partial^2 G}{\partial^2 r}(r, \theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G}{\partial^2 \theta}$

On vérifie :

$\frac{\partial G}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial H}{\partial x}(a + re^{i\theta}) \cos\theta + \frac{\partial H}{\partial y}(a + re^{i\theta}) \sin\theta$
$\frac{\partial G}{\partial \theta}(r, \theta) = r[-\frac{\partial H}{\partial x}(a + re^{i\theta}) \sin\theta + \frac{\partial H}{\partial y}(a + re^{i\theta}) \cos\theta]$
$\frac{\partial^2 G}{\partial^2 r}(r, \theta) = \frac{\partial^2 H}{\partial^2 x}(a+re^{i\theta}) \cos^2\theta+2\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}(a+re^{i\theta}) \cos\theta \sin\theta+\frac{\partial^2 H}{\partial^2 y}(a+re^{i\theta}) \sin^2\theta$
$\frac{\partial^2 G}{\partial^2 \theta}(r, \theta) = r^2[\frac{\partial^2 H}{\partial^2 x}(a + re^{i\theta}) \sin^2\theta - 2\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}(a + re^{i\theta}) \cos\theta \sin\theta$
$+ \frac{\partial^2 H}{\partial^2 y}(a + re^{i\theta}) \cos^2\theta] - r[\frac{\partial H}{\partial x}(a + re^{i\theta}) \cos\theta + \frac{\partial H}{\partial y}(a + re^{i\theta}) \sin\theta]$

d´où le résultat.

Equation différentielle d´Euler Soit $\alpha \geqslant 0$, $R > 0$. (E_α) désigne l´equation différentielle $r^2u''(r) + ru'(r) - \alpha^2u(r) = 0,\ u \in \mathcal{C}^2(]0, R[, \mathbb{R})$.

Le plan des solutions de (E_α) admet pour base $(1, \ln r)$ si $\alpha = 0$, et $(r^\alpha, r^{-\alpha})$ si $\alpha > 0$

B] propriété de la moyenne

enoncé Si H est harmonique sur U, alors H vérifie la propriété de la moyenne :

$$\forall a \in U \quad \forall r > 0\,,\ \overline{D(a, r)} \subset U \qquad H(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(a + re^{i\theta})d\theta$$

preuve Soit $a \in U$ et $\rho > 0$ tel que $D(0,\rho) \subset U$.
Pour $0 \leqslant r < \rho$, on pose : $u(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(a + re^{i\theta})d\theta$

$(r,\theta) \mapsto H(a + re^{i\theta})$ est globalement continue sur $[0,\rho[\times[0,2\pi]$, admet des dérivées partielles d´ordre 1 et 2 par rapport à r continues du couple (r,θ) sur $[0,\rho[\times[0,2\pi]$. u est donc C^2 sur $[0,\rho[$. Par dérivation sous le signe intégral sur $]0,\rho[$ et en utilisant l´expression du Laplacien en polaires, on voit que u vérifie (E_0). u continue sur $[0,\rho[$ est bornée au voisinage de 0, donc u est constante sur $]0,\rho[$, sur $[0,\rho[$ par continuité en 0. u est bien constante de valeur $u(0) = H(a)$

C] problème de Dirichlet sur le disque unité

énoncé On se donne une fonction réelle continue sur S^1, ie une fonction h de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Comment prolonger h en une fonction continue sur $\overline{D(0,1)}$ et harmonique sur $D(0,1)$?

analyse du problème Si H convient, on dispose pour $0 \leqslant r < 1$ de la fonction C^2, 2π-périodique $h_r : \theta \mapsto H(re^{i\theta})$ dont les coefficients de Fourier sont : $c_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta \quad (n \in \mathbb{Z})$.
Pour $n \in \mathbb{Z}$, $(r,\theta) \mapsto H(re^{i\theta})e^{-in\theta}$ est globalement continue sur $[0,1]\times[0,2\pi]$, admet des dérivées partielles d´ordre 1 et 2 par rapport à r continues du couple (r,θ) sur $[0,1[\times[0,2\pi]$. Par dérivation sous le signe intégral, compte tenu de l´expression du Laplacien en coordonnées polaires et de la condition $\Delta_H = 0$, les c_n vérifient sur $]0,1[$ la relation (E_n).
Pour $n \neq 0$, c_n continue sur $[0,1[$ (et même sur $[0,1]$), est bornée au voisinage de 0, donc il existe une constante λ_n telle que :

$$\forall r \in [0,1[\quad c_n(r) = \lambda_n r^{|n|}$$

c_0 est constante sur $[0,1[$ de valeur $\lambda_0 = H(0)$ (cf B]).
h_r de classe C^2 est somme de sa série de Fourier (Dirichlet), ce qui donne :
$\forall r \in [0,1[\quad \forall\theta \in \mathbb{R} \quad h_r(\theta) = \sum_{n\geqslant 0}\lambda_n r^n e^{in\theta} + \sum_{n\geqslant 1}\lambda_{-n}r^n e^{-in\theta}$.
Par continuité de $(r,\theta) \mapsto H(re^{i\theta})e^{-in\theta}$ sur $[0,1]\times[0,2\pi]$, c_n est continue en 1 et : $\lim_{r\to 1^-} c_n(r) = c_n(h)$ d´où : $\lambda_n = c_n(h)$
En définitive : $\quad \forall 0 \leqslant r < 1 \quad h_r = h * \mathcal{P}_r$
ou :

$$\forall z \in D(0,1) \quad H(z) = \sum_{n\geqslant 0} c_n(h)z^n + \sum_{n\geqslant 1} c_{-n}(h)\bar{z}^n$$

synthèse du problème On se donne $h \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
L´inégalité $| c_n(h)z^{|n|} | \leqslant \| h \|_\infty | z |^{|n|}$ valable pour $n \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C}$ assure que les rayons de convergence des séries entières $\sum c_n(h)z^n$ et $\sum c_{-n}(h)z^n$ sont supérieurs à 1.

Pour $z \in D(0,1)$ et $w = e^{i\theta} \in S^1$, on pose :
$H(z) = \sum_{n\geqslant 0} c_n(h)z^n + \sum_{n\geqslant 1} c_{-n}(h)\bar{z}^n$ et $H(w) = h(\theta)$.

• H est continue sur $D(0,1)$.(continuité des sommes de séries entières sur le disque ouvert de convergence et continuité de $z \mapsto \bar{z}$)
• H est continue sur $\overline{D(0,1)}$. (cf p.47)
• Soit $(x_0, y_0) \in D(0,1)$

On choisit $\alpha > 0, \beta > 0$ tels que le rectangle $[x_0-\alpha, x_0+\alpha] \times [y_0-\beta, y_0+\beta]$ soit contenu dans $D(0,1)$. $[x_0-\alpha, x_0+\alpha] \times [-(y_0+\beta), -(y_0-\beta)]$ est aussi inclus dans $D(0,1)$. On envisage H_{y_0} correctement définie sur $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ par :

$$H_{y_0}(x) = \sum_{n\geqslant 0} c_n(h)(x+iy_0)^n + \sum_{n\geqslant 1} c_{-n}(h)(x-iy_0)^n.$$

On rappelle que pour $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, les deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$ ont le même rayon de convergence. Avec la convergence absolue des séries de terme général

- $c_n(h)n(x_0+\alpha+i(y_0+\beta))^{n-1}$
- $c_n(h)n(x_0+\alpha-i(y_0+\beta))^{n-1}$
- $c_n(h)n(n-1)(x_0+\alpha+i(y_0+\beta))^{n-2}$
- $c_n(h)n(n-1)(x_0+\alpha-i(y_0+\beta))^{n-2}$

les séries de fonctions

- $\sum c_n(h)n(x+iy_0)^{n-1}$
- $\sum c_n(h)n(x-iy_0)^{n-1}$
- $\sum c_n(h)n(n-1)(x+iy_0)^{n-2}$
- $\sum c_n(h)n(n-1)(x-iy_0)^{n-1}$

convergent normalement sur $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ donc H_{y_0} est C^2 sur l´intervalle $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ et, par dérivation terme à terme, on a :

$$H''_{y_0}(x_0) = \sum_{n\geqslant 2} c_n(h)n(n-1)(x_0+iy_0)^n + \sum_{n\geqslant 2} c_{-n}(h)n(n-1)(x_0-iy_0)^n$$

On montre de même que :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial^2 y}(x_0,y_0) = -\sum_{n\geqslant 2} c_n(h)n(n-1)(x_0+iy_0)^n - \sum_{n\geqslant 2} c_{-n}(h)n(n-1)(x_0-iy_0)^n$$

De là : $\Delta_H(x_0,y_0) = 0$. H est bien harmonique sur $D(0,1)$.

Onzième partie

Annexes

1 Théorèmes d´Abel. Séries de Hardy

L´outil essentiel est la transformation d´Abel appelée aussi "sommation par parties". On travaille par ailleurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ complet, ce qui permet d´évoquer constamment le critère de Cauchy.

A-Un théorème pour les séries numériques

a) Version "variation bornée"
Si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathbb{K}$ telle que (λ_n) tend vers 0 en $+\infty$ et $\sum \mid \lambda_{n+1}-\lambda_n \mid$ converge, et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathbb{K}$ à sommes partielles bornées (par M), alors la série $\sum \lambda_n u_n$ est convergente.

Lorsque la condition $\sum \mid \lambda_{n+1}-\lambda_n \mid < +\infty$ est vérifiée, on dit que la suite (λ_n) est à variation bornée.

preuve : pour n, p dans $\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n}^{n+p} \lambda_k u_k = \sum_{k=n}^{n+p} \lambda_k(U_k - U_{k-1})$ où pour $k\in\mathbb{N}^*$, $U_k=\sum_{j=0}^{k} u_j$. De là :

$$\sum_{k=n}^{n+p} \lambda_k u_k = -\lambda_n U_{n-1} + \lambda_{n+p}U_{n+p} + \sum_{k=n}^{n+p-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1})U_k$$

et : $\mid \sum_{k=n}^{n+p} \lambda_k u_k \mid \leqslant M[\mid \lambda_n \mid + \mid \lambda_{n+p} \mid + \sum_{k=n}^{n+p-1} \mid \lambda_{k+1}-\lambda_k \mid]$.

Soit $\varepsilon>0$. On choisit $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geqslant n_0$ $\forall q \in \mathbb{N}^*$ $\mid \lambda_n \mid \leqslant \varepsilon$ et $\sum_{k=n}^{n+q} \mid \lambda_{k+1}-\lambda_k \mid \leqslant \varepsilon$. Dans ces conditions, $\mid \sum_{k=n}^{n+p} \lambda_k u_k \mid \leqslant 3M\varepsilon$;
$\sum \lambda_n u_n$ vérifie le critère de Cauchy dans $\mathbb{K}$ donc converge.

b) Version usuelle
Si (λ_n) est une suite réelle qui tend vers 0 en décroissant et si (u_n) est une suite dans $\mathbb{K}$ à sommes partielles bornées, alors $\sum \lambda_n u_n$ est convergente.

(λ_n) tend vers 0 et $\sum_{k=0}^{N} \mid \lambda_{k+1}-\lambda_k \mid = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k - \lambda_{k+1} = \lambda_0 - \lambda_{N+1}$ valable pour tout $N\in\mathbb{N}$ prouve que $\sum \mid \lambda_{n+1}-\lambda_n \mid < +\infty$. On est ainsi ramené au théorème d´Abel version "variation bornée".

application : étude des séries de Hardy La démarche retenue est issue d´un article de J.M Exbrayat et A. Pommelet (RMS-6 fevrier 1994)

On étudie les séries trigonométriques du type $\sum \frac{e^{in^{\alpha}}}{n^{\beta}}$ où $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ et $0<\beta$.

- $\alpha = 0$: convergence ssi $\beta > 1$ (séries de Riemann)
- $\alpha = 1$: convergence par l´usuel Abel.
- $0 < \alpha < 1$
  Si $\beta > 1$, $\sum \frac{e^{in^\alpha}}{n^\beta}$ converge absolument.
  Si $0 < \beta \leqslant 1$, convergence ssi $\beta > 1 - \alpha$.

lemme
Si (u_n) et (v_n) sont deux suites dans $\mathbb{K}$ telles que :

$$v_n = u_n[1 + \frac{c_1}{n^{\alpha_1}} + ... + \frac{c_r}{n^{\alpha_r}} + \bigcirc(\frac{1}{n^{\alpha_{r+1}}})]$$

où : $\alpha_1, ..., \alpha_r > 0$ et $\alpha_{r+1} > 1$,
alors pour tout $\delta > 0$, $\sum \frac{u_n}{n^\delta}$ et $\sum \frac{v_n}{n^\delta}$ sont de même nature.

preuve du lemme

Soit $\delta > 0$. Si $\sum \frac{u_n}{n^\delta}$ converge, $\sum \frac{u_n}{n^\delta}\frac{1}{n^{\alpha_k}}$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$ converge par l´usuel Abel et $\sum \frac{u_n}{n^\delta} \bigcirc(\frac{1}{n^{\alpha_{r+1}}})$ converge (absolument). De là : $\sum \frac{v_n}{n^\delta}$ converge.

Réciproquement, on suppose que $\sum \frac{v_n}{n^\delta}$ converge.
On écrit : $u_n = v_n[1 + \frac{c_1}{n^{\alpha_1}} + ... + \frac{c_r}{n^{\alpha_r}} + \bigcirc(\frac{1}{n^{\alpha_{r+1}}})]^{-1}$ donc
$u_n = v_n[1 - \frac{c_1}{n^{\alpha_1}} - ... - \frac{c_r}{n^{\alpha_r}} + \bigcirc(\frac{1}{n^{\alpha_{r+1}}}) + \frac{c_1^2}{n^{2\alpha_1}} + ...]$ où on ne garde que les puissances de n d´exposant strictement inférieur à α_{r+1}. u_n s´écrit alors : $u_n = v_n[1 + \frac{e_1}{n^{\gamma_1}} + ... + \frac{e_s}{n^{\gamma_s}} + \bigcirc(\frac{1}{n^{\alpha_{r+1}}})]$ où : $\gamma_1, ..., \gamma_s > 0$. Par symétrie des rôles, $\sum \frac{u_n}{n^\delta}$ converge.

retour aux séries de Hardy

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $d_n = e^{i(n+1)^\alpha} - e^{in^\alpha}$.
On a : $d_n = e^{in^\alpha}[e^{i((n+1)^\alpha - n^\alpha)} - 1]$.
Or : $(n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha[(1 + \frac{1}{n})^\alpha - 1] = n^\alpha[1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2n^2} + \bigcirc(\frac{1}{n^3}) - 1]$
ie : $(n+1)^\alpha - n^\alpha = \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2n^{2-\alpha}} + \bigcirc(\frac{1}{n^{3-\alpha}})$.
De là : $d_n = e^{in^\alpha}[e^{\frac{i\alpha}{n^{1-\alpha}} + \frac{i\alpha(\alpha-1)}{2n^{2-\alpha}} + \bigcirc(\frac{1}{n^{3-\alpha}})} - 1]$
$= e^{in\alpha}[1 + \frac{i\alpha}{n^{1-\alpha}} + \frac{i\alpha(\alpha-1)}{2n^{2-\alpha}} + \bigcirc(\frac{1}{n^{3-\alpha}}) + \frac{-\alpha^2}{n^{2-2\alpha}} + ... - 1]$ (on ne garde que les exposants strictement inférieurs à $3 - \alpha$) donc
$d_n = e^{in\alpha}[\frac{i\alpha}{n^{1-\alpha}} + \frac{k_2}{n^{\beta_2}} + ... + \frac{k_r}{n^{\beta_r}} + \bigcirc(\frac{1}{n^{3-\alpha}})]$ avec $\beta_2, ..., \beta_r > 1 - \alpha$. Il vient :

$$d_n = \frac{i\alpha e^{in^\alpha}}{n^{1-\alpha}}[1 + \frac{c_2}{n^{\alpha_2}} + ... + \frac{c_r}{n^{\alpha_r}} + \bigcirc(\frac{1}{n^2})]$$

où : $\alpha_k = \beta_k - (1 - \alpha) > 0$ pour $2 \leqslant k \leqslant r$.

• *premier cas* : $\beta > 1-\alpha\,;\, \beta = 1-\alpha+\delta \quad (\delta > 0)$
On a : $\frac{d_n}{n^\delta} = \frac{i\alpha e^{in^\alpha}}{n^\beta}[1 + \frac{c_2}{n^{\alpha_2}} + ... + \frac{c_r}{n^{\alpha_r}} + \bigcirc(\frac{1}{n^2})]$ avec $\sum d_n \frac{1}{n^\delta}$ convergente (Abel usuel) donc $\sum \frac{e^{in^\alpha}}{n^\beta}$ converge en vertu du lemme.

• *deuxième cas* : $\beta = 1-\alpha$
Comme $\sum d_n$ diverge, $\sum \frac{e^{in^\alpha}}{n^\beta}$ diverge aussi. On peut préciser : $\sum d_n$ a ses sommes partielles $(e^{in^\alpha}-1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ bornées, chaque $\sum \frac{e^{in^\alpha}}{n^{1-\alpha+\alpha_k}}$ et $\sum \frac{e^{in^\alpha}}{n^{1-\alpha}} \bigcirc(\frac{1}{n^2})$ convergent donc ont aussi leurs sommes partielles bornées, de là on conclut que la série divergente $\sum \frac{e^{in^\alpha}}{n^\beta}$ a ses sommes partielles bornées.

• *troisième cas* : $\beta < 1-\alpha\,;\, \beta = 1-\alpha-\delta \quad (\delta > 0)$
on a : $n^\delta d_n = \frac{i\alpha e^{in^\alpha}}{n^\beta}[1 + \frac{c_2}{n^{\alpha_2}} + ... + \frac{c_r}{n^{\alpha_r}} + \bigcirc(\frac{1}{n^2})]$. Comme $\sum d_n$ diverge, $\sum \frac{e^{in^\alpha}}{n^\beta}$ diverge aussi. Pourquoi ses sommes partielles ne sont-elles pas bornées ?
$(n^\delta d_n)$ a ses sommes partielles non bornées. (Sinon avec $d_n = n^\delta d_n \frac{1}{n^\delta}$, $\sum d_n$ converge...). Maintenant, par l´absurde, si $\sum \frac{e^{in^\alpha}}{n^\beta}$ a ses sommes partielles bornées, chaque $\sum \frac{e^{in^\alpha}}{n^\beta}\frac{1}{n^{\alpha_k}}$ converge et a ses sommes partielles bornées. De là, $\sum n^\delta d_n$ a ses sommes partielles bornées. Ce qui n´est pas.

c) Théorème des séries alternées-contrôle du reste

Soit $\sum u_n$ une série alternée $(\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n u_{n+1} < 0)$ telle que $(\mid u_n \mid)$ tend vers 0 en décroissant et ce, dès le premier terme. Alors $\sum u_n$ converge et sa somme est strictement du signe de u_0. Si $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ désigne le reste d´ordre n, alors R_n est du signe de u_{n+1} et : $\mid R_n \mid \leqslant \mid u_{n+1} \mid$ (reste majoré par le premier terme négligé).

d) Un exemple d´utilisation de la version "variation bornée"

On envisage la série de Hardy convergente $\sum \frac{e^{in^\alpha}}{n^\beta}$ $(0 < \alpha < 1,\, \beta > 1-\alpha)$, et la série entière associée $\sum \frac{e^{in^\alpha}}{n^\beta} z^n$. Donner une condition suffisante pour que $\sum \frac{e^{in^\alpha}}{n^\beta} z^n$ converge simplement sur le cercle-unité S^1.

On est amené à étudier les séries $\sum \frac{e^{in\alpha}}{n^\beta} e^{in\theta} \quad (\theta \in \mathbb{R})$. Le cas $\theta = 0(2\pi)$ ne pose pas de problème. Soit à présent $\theta \in]0, 2\pi[$. La suite $(e^{in\theta})$ est à sommes partielles bornées. On cherche donc une condition suffisante pour que $(\frac{e^{in^\alpha}}{n^\beta})$, qui tend vers 0, soit à variation bornée.
$\Psi : x \mapsto \frac{e^{ix^\alpha}}{x^\beta}$ de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$ est dérivable (et même C^1) sur $[1, +\infty[$ avec pour $x \geqslant 1$, $\Psi'(x) = \frac{i\alpha e^{ix^\alpha}}{x^{1-\alpha+\beta}} - \frac{\beta e^{ix^\alpha}}{x^{1+\beta}}$. Sur chaque $[k, k+1] \quad (k \in \mathbb{N}^*)$,

$\mid \Psi'(x) \mid \leqslant \frac{\alpha}{k^{1-\alpha+\beta}} + \frac{\beta}{k^{1+\beta}}$ donc par accroissements finis :

$$\mid \frac{e^{i(k+1)^\alpha}}{(k+1)^\beta} - \frac{e^{ik^\alpha}}{k^\beta} \mid \leqslant \frac{\alpha}{k^{1-\alpha+\beta}} + \frac{\beta}{k^{1+\beta}}.$$

Pour avoir $(\frac{e^{in^\alpha}}{n^\beta})$ à variation bornée, il suffit d´imposer :
$1-\alpha+\beta > 2(1-\alpha) > 1$ ie : $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

B-Un théorème pour les séries entières

enoncé d´Abel radial
Si (a_n) est une suite dans $\mathbb{K}$ telle que $\sum a_n$ converge, alors $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$. En particulier :

$$lim_{\rho\to 1^-, \rho\in\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\rho^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

preuve
C´est une application du critère de Cauchy qui repose de plus sur une transformation d´Abel avec reste. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :
$\forall n \geqslant n_0 \quad \mid R_n \mid = \mid \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \mid \leqslant \varepsilon$. Pour $\rho \in [0,1]$, $n \geqslant n_0$, $p \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n}^{n+p} a_k\rho^k = \sum_{k=n}^{n+p}(R_k - R_{k+1})\rho^k = R_{n-1}\rho^n - R_{n+p}\rho^{n+p} + \sum_{k=n}^{n+p-1} R_k(\rho^{k+1} - \rho^k)$
donc : $\mid \sum_{k=n}^{n+p} a_k\rho^k \mid \leqslant 2\varepsilon\rho^n \leqslant 2\varepsilon$ et le critère de Cauchy uniforme est vérifié.
La fonction somme de $\sum a_n x^n$ est continue sur $[0,1]$ et donc en 1.

cas particulier : $\sum a_n$ série alternée convergente
A x fixé, $\sum a_n x^n$ est une série alternée convergente et son reste d´ordre $n-1$ $(\sum_{k=n}^{\infty} a_k x^k)$ est majoré en module par le premier terme négligé. Delà : $\forall x \in [0,1] \quad \mid \sum_{k=n}^{\infty} a_k x^k \mid \leqslant \mid a_n x^n \mid \leqslant \mid a_n \mid$, ce qui assure la convergence uniforme de $\sum a_n x^n$ sur $[0,1]$.

exercice Autre illustration de la transformation d´Abel avec reste.
montrer que pour la série entière $\sum a_n z^n$, les énoncés (i) convergence uniforme sur $\overline{D(0,1)}$, (ii) convergence uniforme sur $D(0,1)$ et (iii) convergence uniforme sur S^1 sont équivalents.

2 **Un peu de Baire**

Cet appendice présente, sans démonstrations, la propriété de Baire et deux résultats relatifs aux espaces de Banach (Théorème de l´application ouverte et théorème de Banach-Steinhaus). Les preuves se trouvent par exemple dans *Analyse fonctionnelle* de Brezis ou *les maths en tête* de Gourdon.

a-propriété de Baire

Dans un espace de Banach E, toute suite de fermés de E sans intérieur a une réunion (en général non fermée) d´intérieur vide ; ou de façon équivalente : toute suite d´ouverts denses dans E a une intersection encore dense dans E.

utilisation courante

Si (F_n) est une suite de fermés du Banach E telle que $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = E$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que F_{n_0} soit d´intérieur non vide dans E.
Par exemple, en considérant dans $\mathbb{R}[X]$ les sous-espaces (de dimension finie) $F_n = Vect(1, X, .., X^n)$, on montre qu´aucune norme ne rend $\mathbb{R}[X]$ complet.

b-théorème de l´application ouverte

Une application linéaire continue surjective entre espaces de Banach transforme tout ouvert de la source en ouvert du But.

corollaire

Si E et F sont 2 espaces de Banach et si T est un opérateur linéaire continu et bijectif de E sur F, alors T^{-1} est continu de F sur E.

c-théorème de Banach-steinhaus

Soit E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé et $(T_i)_{i\in I}$ une famille d´opérateurs linéaires continus de E dans F. Si, à chaque fois qu´on fixe x dans E, la famille $(T_i(x))_{i\in I}$ est bornée dans F, alors $(T_i(x))_{i\in I})$ est uniformément bornée sur $\overline{B(0,1)}_E$.
Précisément avec E, F et (T_i) comme ci dessus :
$\forall x \in E \quad \exists M_x \in \mathbb{R} \quad \forall i \in I \quad \| T_i(x) \|_F \leqslant M_x$
$\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \overline{B(0,1)}_E \quad \forall i \in I \quad \| T_i(x) \|_F \leqslant M.$

Résultat faux si E n´est pas complet : envisager sur $\mathbb{R}[X]$ la norme
$\| \sum_{i=1}^{n} a_i X^i \| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} | a_i |$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n : P \mapsto P^{(n)}(0)$.

application

La limite simple d´une suite d´applications linéaires continues entre un espace de Banach E et un espace vectoriel normé F est (linéaire) continue de E dans F.

3 Trois en Un

objectif On peut obtenir le théorème de Bernstein sur $I = [0,1]$, le théorème de Poisson et le théorème de Fejer à partir d´un même squelette de démonstration. On étudie l´articulation commune de ces 3 preuves, puis on démontre le théorème de Korovkin-Schaeffer qui unifie ces 3 résultats.

énoncés • Pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, le n^{eme} polynôme de Bernstein associé à f est défini sur $I = [0,1]$ par $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$

théorème de Bernstein : la suite de fonctions $(B_n(f))$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers f dès que f est dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

• *théorème de Fejer* : pour g dans $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\sigma_n(g) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}\sum_{p=-k}^{k} c_p(g) e_p$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers g.

• *théorème de Poisson* : soit $h \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour $\rho \in [0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose : $h * \mathcal{P}_\rho(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\mathcal{P}_\rho(x-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(x-t)\mathcal{P}_\rho(t)dt$.
Alors : $\lim_{\rho\to 1^-} \parallel h * \mathcal{P}_\rho - h \parallel_\infty = 0$.

notations On considère les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $1 : x \mapsto 1$, $c : x \mapsto \cos x$, $s : x \mapsto \sin x$, et pour $i = 1,2$ $f_i : x \mapsto x^i$.

A) les 3 preuves

Il s´agit de majorer $\mid f(x) - B_n(f)(x) \mid$ pour $x \in [0,1]$, $\mid \sigma_n(g)(x) - g(x) \mid$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $\mid h * \mathcal{P}_\rho(x) - h(x) \mid$ pour $x \in \mathbb{R}$ par des quantités qui peuvent être rendues arbitrairement petites indépendemment de x. On compare facilement des objets de même allure ; il est donc naturel de commencer les preuves par :

• pour $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, $\mid B_n(f)(x) - f(x) \mid = \mid \sum_{k=0}^{n} [f(\frac{k}{n}) - f(x)] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \mid$

$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \mid f(\frac{k}{n}) - f(x) \mid C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$

• pour $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mid \sigma_n(g)(x) - g(x) \mid = \mid \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [g(t) - g(x)] F_n(x-t)dt \mid$
$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mid g(t) - g(x) \mid F_n(x-t)dt$

• pour $x \in \mathbb{R}$, $\rho \in [0,1[$, $\mid h * \mathcal{P}_\rho(x) - h(x) \mid = \mid \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [h(t) - h(x)] \mathcal{P}_\rho(x-t)dt \mid$

$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mid h(t) - h(x) \mid \mathcal{P}_\rho(x-t)dt$

Les membres de droite des inégalités ci-dessus vont être majorés en 2 temps. On fait apparaitre un "terme à distance finie" petit grâce à l´uniforme continuité de f, g, et h, puis un "reste" sur lequel les fonctions n´ont pas de contrôle. On utilise quand même le fait que f, g et h sont bornées pour gérer ce reste.

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x,x') \in I \times I \ \mid x - x' \mid \leqslant \eta \Rightarrow \mid f(x) - f(x') \mid \leqslant \varepsilon$$

$\mid B_n(f)(x) - f(x) \mid \leqslant \sum_{k \backslash \mid \frac{k}{n} - x \mid \leqslant \eta} \mid f(\frac{k}{n}) - f(x) \mid C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$
$+ \sum_{k \backslash \mid \frac{k}{n} - x \mid > \eta} \mid f(\frac{k}{n}) - f(x) \mid C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$
$\leqslant \varepsilon + 2 \parallel f \parallel_\infty \sum_{k \backslash \mid \frac{k}{n} - x \mid > \eta} \frac{(\frac{k}{n} - x)^2}{\eta^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$
$\leqslant \varepsilon + \frac{2 \| f \|_\infty}{\eta^2} \{ B_n(f_2)(x) - 2x B_n(f_1)(x) + x^2 B_n(1)(x) \}$
$\leqslant \varepsilon + \frac{2 \| f \|_\infty}{\eta^2} \{ [B_n(f_2)(x) - x^2] - [2x B_n(f_1)(x) - 2x^2] + [x^2 B_n(1)(x) - x^2] \}$
$\leqslant \varepsilon + \frac{2 \| f \|_\infty}{\eta^2} \{ \mid B_n(f_2)(x) - x^2 \mid + 2 \mid B_n(f_1)(x) - x \mid + \mid B_n(1)(x) - 1 \mid \}$ $\spadesuit$

Avec les mêmes notations pour g,

$\mid \sigma_n(g)(x) - g(x) \mid \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\mid t - x \mid \leqslant \eta} \mid g(t) - g(x) \mid F_n(x-t) dt$
$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\mid t - x \mid > \eta} \mid g(t) - g(x) \mid F_n(x-t) dt$
$\leqslant \varepsilon + 2 \parallel g \parallel_\infty \frac{1}{2\pi} \int_{\mid t - x \mid > \eta} F_n(x-t) dt$
$\leqslant \varepsilon + 2 \parallel g \parallel_\infty \frac{1}{2\pi} \int_{\mid t - x \mid > \eta} \frac{1 - \cos(x-t)}{1 - \cos \frac{\eta}{2}} F_n(x-t) dt$
$\leqslant \varepsilon + \frac{2 \| g \|_\infty}{1 - \cos \frac{\eta}{2}} \{ \sigma_n(1)(x) - 1 - \cos(x) [\sigma_n(c)(x) - \cos x] - \sin(x) [\sigma_n(s)(x) - \sin x] \}$
$\leqslant \varepsilon + \frac{2 \| g \|_\infty}{1 - \cos \frac{\eta}{2}} \{ \mid \sigma_n(1)(x) - 1 \mid + \mid \sigma_n(c)(x) - \cos x \mid + \mid \sigma_n(s)(x) - \sin x \mid \}$ $\spadesuit'$

De même :

$\mid h * \mathcal{P}_\rho(x) - h(x) \mid$
$\leqslant \varepsilon + \frac{2 \| h \|_\infty}{1 - \cos \frac{\eta}{2}} \{ \mid 1 * \mathcal{P}_\rho(x) - 1 \mid + \mid c * \mathcal{P}_\rho(x) - \cos x \mid + \mid s * \mathcal{P}_\rho(x) - \sin x \mid \}$ $\spadesuit''$

$\spadesuit$ prouve que la convergence uniforme sur I de $B_n(f)$ vers f pour les trois fonctions $1, f_1$ et f_2 implique la convergence uniforme de $B_n(f)$ vers f pour f quelconque dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. De même, avec $\spadesuit'$, la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de $\sigma_n(f)$ vers f pour les fonctions-test $1, c, s$ assure le théorème de Fejer. Remarque analogue avec $\spadesuit''$.

exercice 1) Determiner les polynômes $B_n(1), B_n(f_1), B_n(f_2)$
2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n(1) = 1, \sigma_n(c) = \frac{n}{n+1} c, \sigma_n(s) = \frac{n}{n+1} s$
3) Vérifier que : $\forall \rho \in I \quad c * \mathcal{P}_\rho = \rho c, s * \mathcal{P}_\rho = \rho s$
4) Conclure.

B) théorème de Korovkin-Schaeffer

enoncé I désigne un intervalle compact de $\mathbb{R}$. On note 1 l´application de I dans $\mathbb{R}$ constante de valeur 1. Soit $Q = \{1, f_1, .., f_k\}$ une partie finie de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et p une application définie sur $I \times I$, à valeurs positives, nulle sur la diagonale de $I \times I$ et de la forme $p(t,x) = \sum_{j=1}^{k} a_j(t) f_j(x)$ où chaque a_j est continue sur I. Le couple (Q, p) est appelé ensemble-test.

Pour $h : I \times I \to \mathbb{R}$, on pose : $Z(h) = \{(t,x) \in I \times I \setminus h(t,x) = 0\}$, pour $f : I \to \mathbb{R}$, $df : (t,x) \mapsto f(x) - f(t)$.

Soit $S \subset \overline{R}, \alpha \in \overline{S}$ et $(L_s)_{s \in S}$ une famille d´endomorphismes monotones (ou positifs) de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

Si, pour $f \in Q$, $\lim_{s \to \alpha} \parallel L_s(f) - f \parallel_\infty = 0$, alors $\lim_{s \to \alpha} \parallel L_s(f) - f \parallel_\infty = 0$ pour tout f de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ vérifiant $Z(p) \subset Z(df)$.

preuve Voici le principe de la démonstration :
• on ramène le problème portant sur f à un problème portant sur df.
• on exploite $Z(p) \subset Z(df)$ pour se ramener à un problème sur p.
• on conclut grâce à la forme de p.

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ vérifiant $Z(p) \subset Z(df)$. Pour $(t,x) \in I \times I$,
on a :$f(x) = df(t,x) + f(t)$ donc $L_s(f) = L_s(df(t, \bullet)) + f(t) L_s(1)$ pour tout $s \in S$ et tout $t \in I$.
En particulier : $L_s(f)(t) - f(t) = L_s(df(t, \bullet))(t) + f(t)[L_s(1) - 1(t)]$. De là :

$$\parallel L_s(f) - f \parallel_\infty \leqslant sup_{t \in I} \mid L_s(df(t, \bullet))(t) \mid + \parallel f \parallel_\infty \parallel L_s(f_1) - f_1 \parallel_\infty .$$

Puisque $\lim_{s \to \alpha} \parallel L_s(f_1) - f_1 \parallel_\infty = 0$, il suffit de montrer que
$sup_{t \in I} \mid L_s(df(t, \bullet))(t) \mid$ tend vers 0 quand s tend vers α.

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de df sur $I \times I$, on choisit un ouvert Ω de $I \times I$ tel que : $Z(df) \subset \Omega$ et $\forall (t,x) \in \Omega \ \mid df(t,x) \mid \leqslant \varepsilon$. On note $K = I^2 \backslash \Omega$ (fermé dans le compact I^2). p est continue et strictement positive sur le compact K donc p atteint sa borne inférieure μ sur K et on a : $\mu > 0$. Pour $(t,x) \in \Omega$, $\mid df(t,x) \mid \leqslant \varepsilon$ et pour $(t,x) \in K$, on a :
$\mid df(t,x) \mid \leqslant \parallel df \parallel_\infty \frac{p(t,x)}{\mu}$ donc $\mid df(t,x) \mid \leqslant \varepsilon + \parallel df \parallel_\infty \frac{p(t,x)}{\mu}$ sur I^2.
Par monotonie des L_s, $\mid L_s(df(t, \bullet)) \mid \leqslant L_s(\mid df(t, \bullet) \mid)$ donc

$$sup_{t \in I} \mid L_s(df(t, \bullet))(t) \mid \leqslant \varepsilon \parallel L_s(1) \parallel_\infty + \frac{\parallel df \parallel_\infty}{\mu} sup_{t \in I} L_s(p(t, \bullet))(t).$$

Puisque $(\parallel L_s(1) \parallel_\infty)$ est bornée, il suffit pour conclure d´avoir
$\lim_{s \to \alpha} sup_{t \in I} L_s(p(t, \bullet))(t) = 0$.

On peut écrire : $\forall (t,x) \in I^2 \; p(t,x) = \sum_{j=1}^{k} a_j(t)[f_j(x) - f_j(t)]$ donc :
$\forall t \in I \; L_s(p(t,\bullet))(t) = \sum_{j=1}^{k} a_j(t)[L_s(f_j)(t) - f_j(t) + f_j(t) - f_j(t)L_s(f_1)(t)]$
Il vient pour $s \in S$:

$$0 \leqslant sup_{t\in I} L_s(p(t,\bullet))(t) \leqslant M \sum_{j=1}^{k} \{\| L_s(f_j) - f_j \|_\infty + \| f_j \|_\infty \| L_s(1) - 1 \|_\infty\}$$

où $M = \max_{1\leqslant j\leqslant k} \| a_j \|_\infty$. Avec $\lim_{s\to\alpha} \| L_s(f_j) - f_j \|_\infty = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$, on conclut que $\lim_{s\to\alpha} sup_{t\in I} L_s(p(t,\bullet))(t)$ existe et vaut 0. D´où le résultat.

exercice Retrouver les 3 théorèmes convoités en utilisant l´application $(t,x) \mapsto (x-t)^2$ de $[0,1] \times [0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et l´ application réelle définie sur $[-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$ par $(t,x) \mapsto 1 - \cos(x-t)$.

Références

• Analyse réelle et complexe.
Rudin, Masson

• Cours d´analyse.
A. Pommelet, Ellipse

• Du fini à l´infini.
P. Meunier, IREM Montpellier

• Eléments d´analyse pour l´agrégation.
Zuilly, *Queffelec*, Masson

• Fonctions analytiques.
H. Cartan, Hermann

• Les maths en tête.
X. Gourdon, Ellipse

• Revue de Mathématiques spéciales (RMS), Vuibert
RMS6-février1994, RMS5-janvier1995, RMS-mai-juin1998,
Epreuves orales parues dans divers numéros.

• Thèmes d´analyse pour l´agrégation.
J.M Exbrayat, *M.Alessandri*, Masson