

**CALCUL DE LOGARITHMES**

**I. Questions préliminaires**

On considère le nombre  $r = \ln(\sqrt{2})$ .

1°) Quel est le carré de  $\sqrt{2}$ ?.....

2°) Simplifier alors l'écriture de  $2r$  :  $2r = 2 \ln(\sqrt{2}) = \dots\dots\dots$

Plus généralement, on admettra que  $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$  si  $x > 0$ .

3°) Calculer à 6 décimales près, le nombre  $\ln(1,001)$  :.....

4°) Calculer à 6 décimales près, le nombre  $\ln(0,999)$  :.....

Plus généralement, on admettra que  $\ln(x) \approx x - 1$  si  $x \in [0,999 ; 1,001]$ .

**II. Algorithme**

Pour calculer  $\ln(2)$ , on remplace 2 par sa racine carrée jusqu'à ce que le résultat soit inférieur à 1,001 en comptant le nombre  $N$  d'itérations. Lorsque le résultat est inférieur à 1,001 on lui soustrait 1 ; puis on double le logarithme  $N$  fois ; le résultat obtenu doit être proche de  $\ln(2)$ .

Compléter le tableau suivant (à 8 décimales) :

$n$	$u_n$	valeur approchée
0	2	2
1	$\sqrt{2}$	1,41421356
2	$\sqrt{\sqrt{2}}$	
3	$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$	
4	$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}$	
5	$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}$	
6	$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}}$	
7	$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}}}$	
8	$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}}}}$	
9	$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}}}}}$	
10	$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}}}}}}$	




Traduction en JavaScript : Dans CaRMetal, cliquer sur "javascript" puis "nouveau script dans la construction". Entrer alors la fonction ln suivante :

```
function ln(x){
  n=0;
  while (Math.abs(x-1)>0.001){
    n=n+1;
    x=Math.sqrt(x);
  }
  y=x-1;
  while(n>0){
    y=y*2;
    n=n-1;
  }
  return y;
}



Println(ln(2));
Println(Math.log(2));
```

- 1°) Quelle valeur l’algorithme renvoie-t-il pour  $\ln(2)$  ?.....
- 2°) Quelle valeur renvoie la calculatrice pour  $\ln(2)$  ?.....
- 3°) De combien de pourcents se trompe l’algorithme sur le calcul de  $\ln(2)$  ?.....
- 4°) Pourquoi l’algorithme ne permet-il pas de calculer le logarithme d’un nombre négatif?

III. **Prolongement** (avec CaRMetal 3.6 ou supérieur)

- 1°)  Afficher les axes;
- 2°)  Créer un point sur l’axe des abscisses; le nommer Px;
- 3°)  Créer un point M dans le plan; cacher son nom, le mettre en petit et activer sa trace.
- 4°) Remplacer la fin du script (après la définition de la fonction) par les lignes suivantes :

```
x=X("Px");
Move("M",x,ln(x));
```

- 5°)  Ouvrir le gestionnaire de scripts ; dans la case "cliquer ou glisser", entrer Px. Bouger Px avec la souris.
- 6°)  Représenter graphiquement la fonction  $\log(x)$  pour comparer avec la fonction définie algorithmiquement.

*Cet algorithme a été publié en 1617 par Henry Briggs (1561-1630).*