

# Coloration de graphes

## Graphes et couleurs

Alain Busser

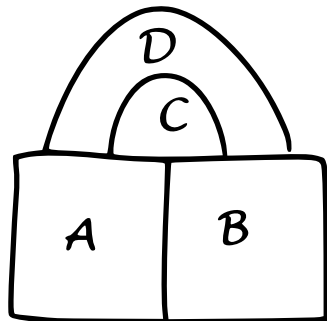
IREM de La Réunion

3 avril 2018

# My Dear Hamilton

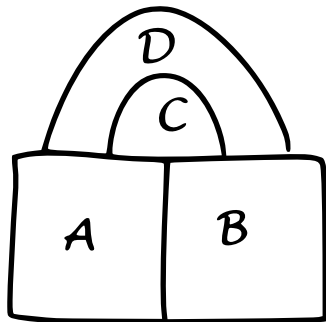
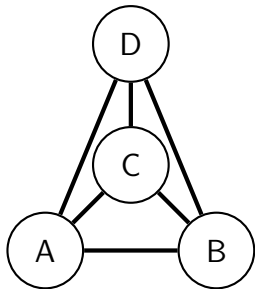
*Lettre de DeMorgan à Hamilton, 23 octobre 1852*

A student of mine asked me today to give him a reason for a fact which I did not know was a fact. He says that if a figure be any how divided and the compartments differently colored so that figures with any portion of common boundary line are differently colored the following is his case in which four colors are wanted.



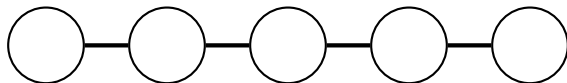
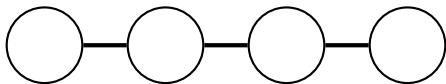
# My Dear Hamilton

*Lettre de DeMorgan à Hamilton, 23 octobre 1852*



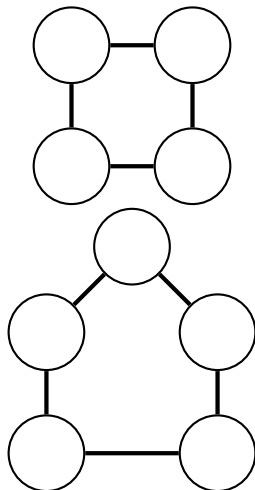
# Arthur Cayley 1879

NP-complétude du problème



# Arthur Cayley 1879

NP-complétude du problème



# Kempe 1879

Avec la caractéristique d'Euler

## Theorem

*Tout graphe planaire peut être colorié avec un maximum de 5 couleurs.*

*Kempe réduit ce nombre à 4.*

# Tait 1880

Avec des cycles hamiltoniens

## Theorem

*Tout graphe planaire peut être colorié avec un maximum de 4 couleurs.*

# Édouard Lucas

*Récréations mathématiques tome IV, 1880*

Lucas expose

- La preuve de Kempe («théorème de Kempe»)
- le fil directeur de la preuve de Tait
- l'utilisation du théorème de Tait pour résoudre le jeu icosien d'Hamilton

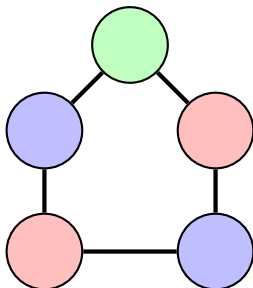


# Édouard Lucas

*Récréations mathématiques tome IV, 1880*

## Theorem

*Si tous les degrés des sommets sont pairs alors 3 couleurs suffisent.*

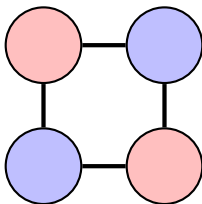


# Édouard Lucas

*Récréations mathématiques tome IV, 1880*

## Theorem

*Un graphe planaire ne contenant aucun cycle impair peut se colorier avec seulement 2 couleurs.*



# Heawood 1890

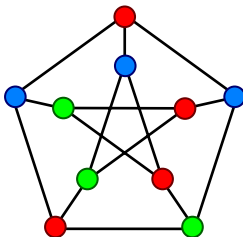
Découvre une faille dans la preuve de Kempe mais

## Theorem

*Tout graphe planaire peut être colorié avec un maximum de 5 couleurs*

# Petersen 1891

Découvre une faille dans la preuve de Tait.  
Donne un exemple de graphe non planaire.



# Avant guerre

- En 1931 Sainte-Lagüe publie un livre sur les mathématiques récréationnelles, dont la moitié est consacrée à la *conjecture* des 4 couleurs.
- En 1935 Roland Sprague découvre une stratégie gagnante pour le jeu de Nim, basée sur une coloration du graphe du jeu.
- En 1939 Patrick Grundy redécouvre cette stratégie gagnante, indépendamment de Roland Sprague.

# Après guerre

- En 1959 Edsger Dijkstra publie l'algorithme de Dijkstra pour trouver le plus court chemin entre deux sommets d'un graphe pondéré. Il utilise un coloriage des sommets.
- Le coloriage d'un graphe planaire est NP-complet.

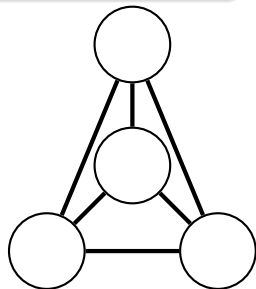
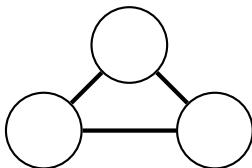
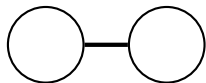
# Preuves du théorème

- En 1976 Kenneth Appel et Wolfgang Haken démontrent le théorème des 4 couleurs, à l'aide d'un ordinateur.
- En 2005 Benjamin Werner et Georges Gonthier font démontrer le théorème par Coq.

# Corollaire

## Theorem

*Il n'existe que trois graphes complets qui soient planaires :  $K_2$ ,  $K_3$  et  $K_4$ .*

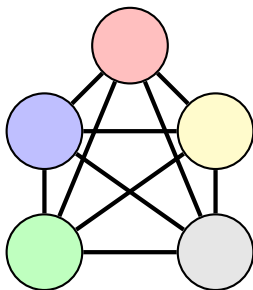




# Corollaire

## Theorem

*Il n'existe que trois graphes complets qui soient planaires :  $K_2$ ,  $K_3$  et  $K_4$ .*



# Corollaire

## Theorem

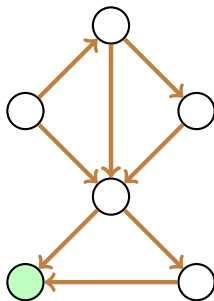
*Il n'existe que trois graphes complets qui soient planaires :  $K_2$ ,  $K_3$  et  $K_4$ .*

## Démonstration.

Il faut  $n$  couleurs pour colorier  $K_n$  donc si  $n \geq 5$ ,  $K_n$  viole le théorème des 4 couleurs et n'est donc pas planaire.  $\square$

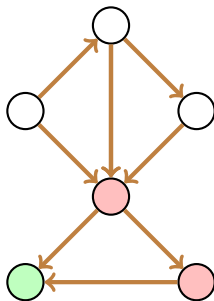
# Algorithme de Tobé

Amélioration de l'algorithme de Sprague-Grundy



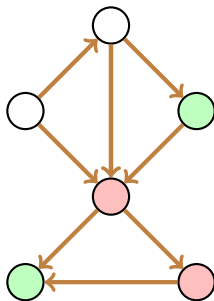
# Algorithme de Tobé

Amélioration de l'algorithme de Sprague-Grundy



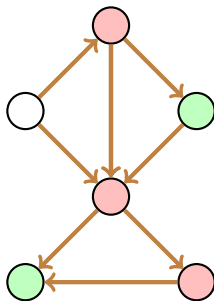
# Algorithme de Tobé

Amélioration de l'algorithme de Sprague-Grundy



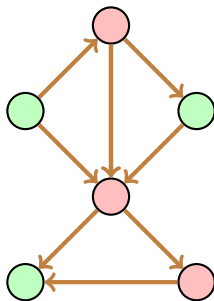
# Algorithme de Tobé

Amélioration de l'algorithme de Sprague-Grundy



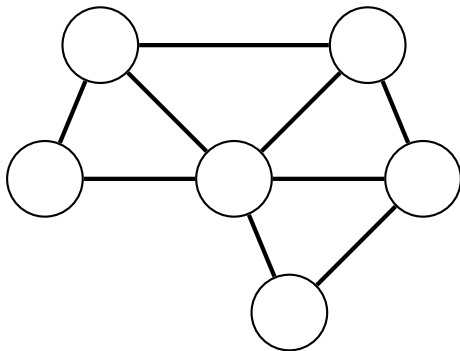
# Algorithme de Tobé

Amélioration de l'algorithme de Sprague-Grundy



# Le jeu de Col

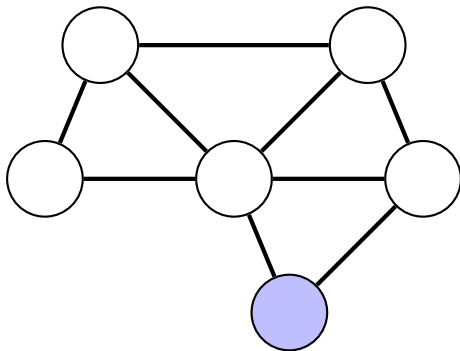
Colin Vout, vers 1970





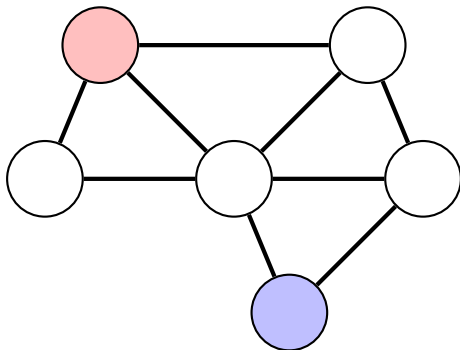
# Le jeu de Col

Colin Vout, vers 1970



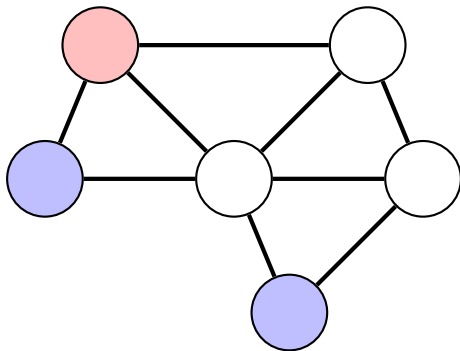
# Le jeu de Col

Colin Vout, vers 1970



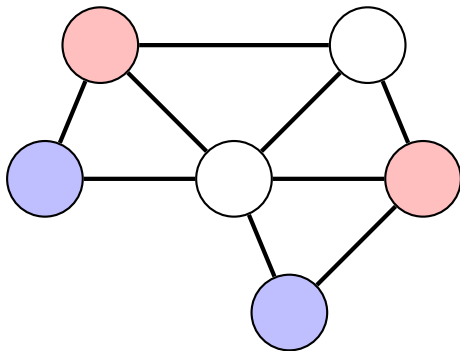
# Le jeu de Col

Colin Vout, vers 1970



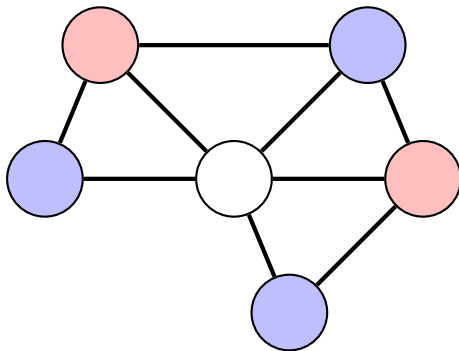
# Le jeu de Col

Colin Vout, vers 1970



# Le jeu de Col

Colin Vout, vers 1970



## Extraits du rapport Villani-Torossian

La verbalisation est centrale : dès la maternelle, le professeur encourage l'élève à raisonner à voix haute et à échanger avec les autres en mettant « un haut-parleur sur sa pensée ».

La manipulation tient une place primordiale, mais elle est pensée en vue de l'abstraction et ceci dans une perspective de progressivité étendue sur le long terme.

Les mathématiques discrètes, par exemple, sont trop marginales dans l'enseignement des mathématiques aujourd'hui, alors qu'elles constituent, d'une part, un lien avec la recherche contemporaine et l'informatique et d'autre part un champ dans lequel il est permis de raisonner et prendre du plaisir sur des problèmes motivants avec des connaissances mathématiques minimales.