Paradoxe de Curry
Troisième partie

Dans les deux articles précédents, on a vu démontré, avec deux phrases « jumelles », que Dieu existe et en même temps, qu'il n'existe pas. Aujourd'hui on va voir quelques conséquences de ces deux faits juxtaposés. Pour commencer, quelques définitions :

Définition 1. On dit qu'une théorie est *complète* si tout ce qui est vrai dans cette théorie, peut y être démontré.

Définition 2. On dit qu'une théorie est *inconsistante* si on peut y démontrer à la fois un théorème et sa négation. Dans le cas contraire, la théorie est dite *consistante*.

Ainsi, il semblerait que Curry ait réussi à prouver que la logique classique est inconsistante...

C'est le moment d'évoquer Augustus De Morgan (1806-1871) et un de ses théorèmes de logique, lequel affirme l'équivalence entre

- La négation de « $2 + 2 = 4$ et $2 + 1 = 3$ »
- La disjonction des négations « $2 + 2 \neq 4$ ou $2 + 1 \neq 3$ ».

Ici on va appliquer cette loi au *principe de non-contradiction*, selon lequel une proposition ne peut pas être à la fois vraie et fausse : « Il est faux que p et sa négation $\neg p$ soient vraies toutes les deux ». De Morgan permet d'écrire ceci : « Soit p est faux, soit la négation de $\neg p$ est fausse ». Ce qui veut dire que, en vertu de l'équivalence entre une proposition p et la négation de sa négation $\neg\neg p$, le principe de tiers exclu n'est plus un principe, mais une conséquence du principe de non-contradiction.

On a vu dans le premier article de cette série, que toute implication du type « si 2+2=5 alors il fait beau » est vraie[1]. Maintenant, le principe de non-contradiction amène à considérer fausse une proposition comme celle qu'on a démontré avec les phrases autoréférentielles de Curry : « Dieu existe et en même temps, il n'existe pas ». Ce qui veut dire que toute proposition est démontrable à partir des phrases de Curry :

Toute théorie inconsistante est complète ; on appelle cela le *principe d'explosion*[2]. Inversement, si une théorie mathématique est consistante alors elle est incomplète. C'est l'énoncé du premier théorème d'incomplétude de Gödel (1906-1977). Le second théorème d'incomplétude dit que, si une théorie mathématique est consistante, alors on ne peut y démontrer cette consistance.

On a alors, pour les théories mathématiques (pas seulement logiques mais avec des nombres entiers) la dualité suivante :

- Si la théorie est consistante, alors on ne peut pas y démontrer qu'elle est consistante ;
- Si elle est inconsistante, alors on peut démontrer qu'elle est consistante (puisqu'on peut tout y démontrer)

Le seul moyen de prouver qu'une théorie est consistante, c'est qu'elle ne le soit pas...

Maintenant qu'on a a vu à quel point le paradoxe de Curry est catastrophique pour la cohérence de la logique, on va consacrer les deux prochains articles à chercher des portes de sortie.

1. le seul cas où une implication est fausse, est celui où sa prémisse est vraie et sa conclusion est fausse. Lorsque sa prémisse est fausse, une implication est donc toujours considérée comme vraie.
2. en latin, *ex falso quodlibet*, ou "du faux vient n'importe quoi"