

Paradoxe de Curry Cinquième partie

Dans les articles précédents, on a vu comment des phrases autoréférentielles découvertes par Haskell Curry peuvent constituer une démonstration par l'absurde du principe du tiers exclu :

Toute proposition est soit vraie, soit fausse

On va voir par quoi on peut remplacer ce tiers exclu et quelles en sont les conséquences. Plusieurs approches peuvent être comparées, dont certaines sont d'ailleurs plus vieilles que le paradoxe de Curry.

1. La *logique intuitionniste* de Luitzen Brouwer (1881-1966) est basée sur l'absence du tiers exclu, et de tous les axiomes qui auraient permis de démontrer le tiers exclu. C'est le cas notamment
 - de la double négation : En logique intuitionniste, comme en logique classique, « s'il fait beau alors il ne pleut pas » est vraie, mais la réciproque « s'il ne pleut pas alors il fait beau » ne l'est pas forcément (on a $p \Rightarrow \neg\neg p$ mais pas $p \Leftrightarrow \neg\neg p$) ;
 - de la loi de De Morgan $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$; on a seulement $\neg p \vee \neg q \Rightarrow \neg(p \wedge q)$

Ces deux particularités de la logique intuitionniste ont visiblement pour effet d'empêcher de prouver le tiers exclu à partir de la non-contradiction, qui est acceptée par les intuitionnistes. Kurt Gödel a démontré que, si la logique classique est consistante, alors la logique intuitionniste l'est également.

2. Si une proposition peut être autre chose que vraie ou fausse, il reste à voir quelle valeur de vérité lui accorder : Indéterminée, insensée, absurde ? Des modèles de logique trivalente ont été proposés dès 1920¹ (Łukasiewicz, suivi par Emil Post en 1921, Hans Reichenbach et Kurt Gödel en 1932, puis Bochvar, Kleene, Tarski etc)

Dans une logique trivalente, on estime que la phrase de Curry n'est ni vraie ni fausse. Par exemple, sa valeur de vérité peut être considérée comme indéterminée.

3. La logique floue va plus loin, en attribuant à toute proposition une valeur de vérité comprise entre 0 (pour les propositions fausses) et 1 (pour les propositions vraies). Dans le système de Łukasiewicz on calcule la valeur de vérité de $\neg p$ par $1 - x$ où x est la valeur de vérité de p ; si la valeur de vérité de q est y , la valeur de vérité de $p \wedge q$ est le minimum de x et y et la valeur de vérité de $p \vee q$ est le maximum de x et y . La valeur de vérité de $p \Rightarrow q$ est $1 - x + y$, sauf si ce nombre dépasse 1 auquel cas on prend 1. Alors si c est la valeur de vérité de la phrase de Curry et d la valeur de vérité de l'existence de Dieu, on a par interprétation de la phrase de Curry dans le système de Łukasiewicz :

$$c = 1 - c + d$$

soit $d = 2c - 1$, qui admet d'autres solutions que $c = 1$ et $d = 1$ ² ; par exemple $c = \frac{1}{2}$ et $d = 0$, qu'on peut résumer par

Si cette phrase est à moitié vraie, alors Dieu n'existe pas

Bien entendu, il y a aussi « si cette phrase est à moitié vraie, alors Dieu existe » et le demi-paradoxe de Curry est tout aussi paradoxal que le paradoxe complet de Curry...

1. L'idée d'une logique sans tiers exclu reviendrait à Aristote, pour exprimer l'idée qu'on ne connaît pas le futur.
2. En fait $c = 1$ chaque fois que $1 - c + d \geq 1$, soit chaque fois que $d \geq c$