Théorie cardinale du choix social
-
Episode 4
-
Les fonctions d'agrégations quasi-universelles

Olivier SICARD

20 octobre 2016

IREM DE LA REUNION

Résumé : En théorie du choix social, la propriété d'Universalité stipule que les votants ne sont en aucun cas limités dans leurs préférences. A première vue cette propriété semble être totalement indispensable à l'élaboration d'une "bonne" fonction de choix social démocratiquement viable. Cependant, nous allons voir que dans le cadre cardinal de la théorie du choix social l'Universalité pose problème. En effet, le vote cardinal implique nécessairement la mise en place pour tous les votants d'une échelle de notation unique et bornée, mais alors la méthode d'agrégation perd son Universalité.

Table des matières

I Introduction

Chez l'Homme la vue est sûrement le sens parmi les cinq, le plus développé, pourtant lorsque nous regardons quelque-chose, voyons nous la réalité de cet objet ou alors seulement une image de celui-ci ? En ce moment vous lisez ces quelques mots sur une page blanche, vous voyez ces mots mais voyez vous les éventuels plis sur la feuille ? Les éventuelles tâches ? Voyez vous les atomes de carbone qui composent cette feuille et voyez vous l'épaisseur de l'encre par dessus celle-ci ? Évidemment non, nos yeux ne nous renvoient pas la réalité mais seulement une image de cette réalité plus ou moins floue.

Dans le même ordre d'idée, aucun individu n'est capable d'accéder à sa propre matrice réelle des préférences cardinales lorsqu'il a un choix à faire, tout cela par la faute du flou (ou grâce au flou) qui régit tous nos choix. L'Homme est un champion de l'approximation, et cette capacité n'est pas forcément à interpréter comme un défaut ou une tare mais plutôt comme une compétence qui lui est indispensable pour rapidement faire ses choix, qu'ils soient conscients ou inconscients, parmi la multitude de décisions qu'il a à prendre chaque jour.

La relation d'indifférence elle-même est de nature floue, puisqu'elle stipule que deux alternatives différentes sont considérées comme indifférentes. Pour reprendre le célèbre exemple de la tasse de café [LUCE 1956], entre un café sans sucre et un café avec un grain de sucre, la différence est de ... un grain de sucre, pourtant nous y sommes indifférents ; mais nous ne sommes pas indifférents entre un café sans sucre et un café avec 2 cuillères de sucre. Combien de grains de sucre faut-il pour créer la stricte préférence ? Cela dépend des goûts et de la finesse du palais de chacun, mais il est certain que nous pouvons être indifférents à des choses qui en réalité ne le sont pas.

Nous sommes donc incapables de préciser exactement à quel point nous préférons l'alternative a à l'alternative b, nous pouvons juste l'estimer de manière floue : "Je préfère un peu, beaucoup, passionnément, à la folie...". Un autre problème apparaît alors : comment mesurer l'écart entre "passionnément" et "à la folie" ? Chaque individu adoptera une unité de mesure qui lui est propre ! Cependant, dans ces conditions il sera impossible d'agréger des préférences individuelles car elles seront incommensurables.

Dans une première partie nous verrons en quoi la propriété d'Universalité pose problème en Théorie cardinale du choix social, nous ferons un tour d'horizon des méthodes de votes les plus connues et constaterons qu'aucune d'entre elles ne vérifie la propriété d'Universalité. Dans un second temps nous définirons la notion de quasi-universalité, examinerons parmi les méthodes de votes présentés si celles-ci vérifient ou non cette propriété de quasi-universalité et tenterons de définir de manière générale les méthodes d'agrégation quasi-universelles, puis nous conclurons.

II Le problème de l'universalité cardinale et les échelles de notes

En Théorie cardinale du choix social, le problème n'est plus vraiment de savoir comment agréger les matrices de préférences, puisque nous savons que la somme est une fonction d'agrégation largement démocratiquement acceptable. S'il est possible d'imaginer d'autres méthodes d'agrégation comme par exemple la médiane ou le MAX qui peuvent avoir leurs avantages, nous considèrerons dans cet article la somme comme unique méthode d'agrégation. Nous verrons d'ailleurs que la plupart des méthodes de vote cardinales existantes somment effectivement les matrices de préférences individuelles.

Le problème maintenant est donc de savoir quoi sommer !

II.1 La fin de l'Universalité

Un votant est incapable de fabriquer sa matrice de préférences cardinales directement dans $K_p(\mathbb{R})$ pour deux raisons principales. Premièrement la vision qu'il en a est trop flou pour être obtenue aussi précisément et deuxièmement, quand bien même les votants proposeraient des matrices aussi précises que possibles il serait alors impossible de les sommer car elles seraient à priori fabriquées dans des échelles différentes.

En effet, mettons nous à la place d'un votant préférant très largement l'alternative x à l'alternative y, imaginons même que pour ce votant l'alternative x soit infiniment meilleure que l'alternative y. Quelle écart de préférence doit-il choisir pour ce couple d'alternatives ?

Il faudrait que l'écart de préférence entre x et y soit $+\infty$, ce qui est impossible dans $K_p(\mathbb{R})$, et si l'on décidait d'étendre l'espace de départ à $K_p(\overline{\mathbb{R}})$, sommer les matrices de votants n'auraient plus aucun sens puisque l'égalité : $+\infty + k = +\infty$ finirait surement par rendre toutes les alternatives ex-æquo après sommation. Il suffirait pour cela que chaque alternative ait eu au moins une fois la note $+\infty$.

Chaque votant devra donc se résoudre à associer un écart fini entre x et y et celui-ci sera à priori différent pour chaque votant. Dans ce cas sommer n'aura encore une fois pas de sens. En effet, imaginons que n votants préfèrent infiniment x à y et associent tous la note de 10 à x et la note de 0 à y. Un dernier votant quant à lui préfère infiniment y à x et décide d'attribuer à y la note de $10n + 1$ et à x la note de 0. Après sommation c'est y qui l'emporte sur x et ceci indépendamment du nombre n de votants favorables à x !

$K_p(\mathbb{R})$ ne peut donc pas être le domaine de définition des méthodes d'agrégation. En pratique, chaque méthode donne un cadre aux préférences individuelles en pré-supposant que chaque votant est à même de fournir, non pas sa matrice exacte de ses préférences cardinales, mais une restriction sur une partie bornée de $K_p(\mathbb{R})$ décrit par la méthode, le plus souvent à l'aide d'une échelle de notes. Deux principes s'opposent alors :

— On peut d'une part demander à chaque votant un énorme travail de réflexion sur sa matrice des préférences cardinales de sorte qu'il obtienne la matrice la plus exhaustive possible, tout ceci dans le but de refléter au mieux les préférences de chacun et d'obtenir après agrégation un résultat plus en cohérence avec les désirs du peuple. Cependant deux défauts entachent ce genre de méthode :
  Premièrement ces méthodes risquent de décourager bon nombre de votants ; lors de votes nationaux par exemple ou le nombre de candidats peut être assez élevé, le taux d'abstention risque lui aussi d'être élevé, car un certain nombre de votants ne seront pas à même de fournir de manière sincère la matrice des préférences qui leur est demandé.
  Deuxièmement, plus on laisse de liberté aux individus et plus on augmente ses chances de manipuler un scrutin, ce qui bien évidemment est à éviter du mieux possible car pourquoi chercher à avoir la représentation la plus fidèle de ce que pense le peuple si celui-ci ne renvoie pas ce qu'il pense vraiment en ne votant pas sincèrement.

Au final, en poussant le raisonnement à son terme, les méthodes avec peu de restrictions sur les préférences des individus risquent de perdre une partie de l'électorat et de rendre l'autre partie manipulatrice, rendant totalement inutile l'agrégation des préférences.

— On peut d'autre part choisir de brider au maximum les possibilités des votants. Ce genre de méthode a pour qualité de minimiser autant que possible la manipulabilité des scrutins. De plus, le taux d'absentéisme devrait être plutôt bas ou au moins non corrélé avec la méthode d'agrégation employée. Autre avantage, la matrice des préférences étant simple, le traitement d'un profil n'en sera que plus aisé, comparé à des méthodes utilisant des matrices de préférences complexes.
  L'inconvénient principal de ce genre de méthode est la perte importante d'informations du point de vue des préférences individuelles. Ce genre de méthode risque alors de mal interpréter les préférences du peuple et de faire des erreurs dans le classement final des candidats car basée sur un reflet trop flou de ce que pense réellement le peuple.

Dans tous les cas aucune de ces méthodes ne pourra plus être universelle car elles n'agrègeront plus un profil $\widetilde{\pi}$ de $K_p(\mathbb{R})^n$ mais une sorte de projection π sur une partie bornée $\mathscr{D}^n$ de $K_p(\mathbb{R})^n$.

Nous pouvons résumer la situation de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccc} K_p(\mathbb{R})^n & \longrightarrow & \mathscr{D}^n & \longrightarrow & K_p(\mathbb{R}) \\ \widetilde{\pi} & \longmapsto & \pi & \longmapsto & \sum K_i \end{array}$$

Précisons que le profil π construit par les votants a pour vocation de se rapprocher le plus possible du profil $\widetilde{\pi}$. Et c'est en cela que l'on peut considérer π comme le projeté de $\widetilde{\pi}$ sur $\mathscr{D}^n$, cependant $\mathscr{D}^n$ ne possède à priori aucune propriété permettant d'affirmer l'unicité d'un tel profil.

Illustrons ce dernier point par un exemple. Considérons trois candidats a, b, c. Un votant est indifférent entre les candidats a et b, mais déteste le candidat c. Sa matrice de préférence $\widetilde{K}$ est donc de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -x \\ 0 & 0 & -x \\ x & x & 0 \end{pmatrix}$, ou x est un réel strictement positif inconnu du votant mais plutôt élevé. Considérons maintenant le scrutin uninominal à un tour qui demande au votant de mettre un seul bulletin dans l'urne avec le nom du candidat qu'il préfère ou alors de voter blanc.

Si l'on note A, resp (B, C, O) la matrice correspondant au bulletin avec le nom du candidat a, (resp b, c, vote blanc), alors $\mathscr{D} = \{A, B, C, O\}$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons que $\|\widetilde{K}-A\|_\infty = \|\widetilde{K}-B\|_\infty = \|\widetilde{K}-O\|_\infty = max(1, x)$, tandis que $\|\widetilde{K}-C\|_\infty = x + 1$ Notre votant devra donc choisir aléatoirement entre A, B et O.

II.2 Tour d'horizon des méthodes de vote cardinal

Nous proposons de faire un tour d'horizon d'un certain nombre de méthodes d'agrégation cardinales existantes. Nous verrons qu'elles agrègent toutes en sommant les matrices de préférences individuelles et nous observerons leur domaine de définition.

II.2.1 Le scrutin majoritaire uninominal à un tour

C'est le mode d'élection le plus connu et l'un des plus ancien. Chaque votant vote pour le candidat qu'il préfère, celui qui obtient le plus de voix est élu (majorité relative). La fonction d'agrégation f associée à cette méthode de vote est bien la fonction somme :

$$f(\pi) = f(K_1, K_2, ..., K_n) = \sum_{i=1}^{n} K_i$$

Chaque matrice de préférence individuelle K_i étant égale à 0 (vote blanc) ou à $E_j = \begin{pmatrix} 0 & & 1 & & \\ & \ddots & 1 & & \\ -1 & -1 & \ddots & -1 & -1 \\ & & 1 & \ddots & \\ & & 1 & & 0 \end{pmatrix}$.

f est donc définie sur $\mathscr{D}_1^n = \{0, E_1, ..., E_p\}^n$ et $card(\mathscr{D}_1) = p + 1$.

Rappelons qu'en fait les matrices E_j sont les éléments de la base canonique de $K_p(\mathbb{R})$. La colonne unitaire (exception faite du 0 sur la diagonale) correspond au candidat choisi par le votant.

II.2.2 Le vote par approbation (ou assentiment)

Dans cette méthode d'agrégation, chaque électeur constitue une liste de tous les candidats qu'il accepte de voir élus. Le candidat qui recueille le plus grand nombre de voix est élu. Ce système est équivalent pour l'électeur à classer l'ensemble des candidats en deux groupes : les candidats qui ont reçu son approbation, et les candidats qu'il rejette.

La fonction d'agrégation f associée à cette méthode de vote se définit encore par $f(\pi) = f(K_1, K_2, ..., K_n) = \sum_{i=1}^{n} K_i$, cependant chaque matrice de préférence individuelle K_i est plus complexe que pour le scrutin majoritaire uninominal à un tour. En effet les matrices de préférences cardinales acceptées par le vote par approbation sont de la forme $K_i = \sum_{j \in A_i} E_j$ où A_i est l'ensemble des alternatives approuvées par le votant v_i.

f est donc définie sur $\mathscr{D}_2^n = K_p([\![-1; 1]\!])^n$, et $card(\mathscr{D}_2) = 2^p - 1$.

En effet, considérons deux classes A et B. Un classement de p alternatives dans les classes A ou B peut se représenter par un p-uple de $\{A, B\}^p$ possédant 2^p éléments. Cependant les p-uples $\{A, A...A\}$ et $\{B, B, ...B\}$ conduisent tous les deux à la matrice de préférences cardinales nulle (voter blanc), en conclusion nous avons bien $card(\mathscr{D}_2) = 2^p - 1$.

Voici un exemple de matrice des préférences qu'un votant doit fournir :

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1 + E_2.$$

Sur les 5 candidats en jeu, les candidats 1 et 2 ont eu l'approbation du votant tandis que les candidats 3,4 et 5 ont été désapprouvés. Remarquons que le vote par approbation est équivalent au scrutin uninominal majoritaire à un tour lorsqu'il n'y a que deux candidats.

II.2.3 La méthode de Borda

La méthode de Borda est très ancienne car déjà utilisée dans l'antiquité par le sénat romain, mais elle a été formalisée en 1770 par Jean-Charles de Borda.

Elle consiste à fixer un nombre $m \leq p$, chaque votant construit alors une liste de m alternatives par ordre de préférence. A la première alternative de la liste, on attribue m points, la seconde $m-1$ points, et ainsi de suite, la m^{ime} alternative se voyant attribuer 1 point les autres alternatives moins bien classées n'obtiennent aucun point. Finalement on agrège les résultats en sommant les points accordés à chaque alternative.

La fonction d'agrégation f associée à la méthode de Borda se définie encore par $f(\pi) = f(K_1, K_2, ..., K_n) = \sum_{i=1}^{n} K_i$, cependant c'est encore le domaine de définition des matrices de préférence individuelle K_i qui diffère. f est définie sur $\mathscr{D}_3^n$ où $\mathscr{D}_3$ est l'ensemble des matrices de la forme : $K = \sum_{k=1}^{m} (m-k+1)E_{i_k}$ où $(i_1, ..., i_m)$ est un arrangement à m éléments de $[\![1;p]\!]$. On a donc $card(\mathscr{D}_3) = A_p^m = \frac{p!}{(p-m)!}$.

II.2.4 Le vote k-chotomique

Soit $k \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, le vote k-chotomique est une généralisation du vote par approbation (vote par approbation = vote dichotomique). Dans le vote k-chotomique, il est demandé à chaque votant d'associer une note allant de 0 à $k-1$ à chacune des alternatives, permettant ainsi de créer k classes d'indifférences. Pour $j > i$, tout candidat de la classe d'indifférence j est alors strictement préféré à tout candidat de la classe d'indifférence i avec la force $j - i$. Pour chaque candidats on additionne ses notes obtenues, celui qui a le score le plus élevé est élu.

La fonction d'agrégation f associée au vote k-chotomique est encore et toujours définie par $f(\pi) = f(K_1, K_2, ..., K_n) = \sum_{i=1}^{n} K_i$.

Son domaine de définition est $\mathscr{D}_4^n = K_p([\![-k+1; k-1]\!])^n$, et $card(\mathscr{D}_4) = k^p - k + 1$.

En effet, considérons k classes A_1,...,A_k. Un classement de p alternatives dans ces classes peut se représenter par un p-uple de $\{A_1, ..., A_k\}^p$ possédant k^p éléments. Cependant les k p-uples de la forme $\{A_i, A_i, ..., A_i\}$ conduisent tous à la matrice de préférences cardinales nulle (voter blanc), il ne faut donc en compter qu'un seul en conclusion nous avons bien $card(\mathscr{D}_4) = k^p - k + 1$.

II.2.5 Le range-voting

Jusqu'à présent, toutes les échelles de notes que nous avons présentés avaient des "barreaux" dans le sens où les notes autorisées étaient entières. Le range-voting est le premier exemple de méthode d'agrégation proposant une échelle de notes continue puisqu'elle demande à chaque votant d'associer à chaque candidat une note dans l'intervalle réel $[0, 1]$. Pour chaque candidats on additionne ses notes obtenues, celui qui a le score le plus élevé est élu.

La fonction d'agrégation f associée au range-voting est encore et toujours définie par $f(\pi) = f\left(K_1, K_2, ..., K_n\right) = \sum_{i=1}^{n} K_i$. Son domaine de définition est $\mathscr{D}_5 = K_p([-1, 1])^n$. Des méthodes d'agrégation présentées, c'est l'unique domaine de cardial infini.

II.3 Récapitulatif

Pour conclure cette section, voici sous la forme d'un tableau le nombre de façons de voter possible suivant le nombre de candidats pour chacune des méthodes. Remarquons que le Range-voting n'apparait pas dans le tableau puisque le nombre de façons de voter est toujours infini.

Nb candidats	Uninominal	Approbation	Borda(m=p)	3-chotomique	5-chotomique
2	3	3	2	7	21
5	6	31	120	241	3121
10	11	1023	3628800	59047	9765621

II.4 Méthodes d'agrégation équivalentes

Puisque choisir une méthode d'agrégation cardinale ce n'est pas choisir comment agréger mais bien définir les matrices que l'on pourra agréger, il est légitime de se demander si deux domaines de définitions différents de méthodes d'agrégation peuvent conduire à des classement cardinaux identiques ou au moins "équivalents" des alternatives.

Considérons les deux exemples suivants :

— Dans un premier temps, autorisons les votants à attribuer à chaque alternatives la note 0,1 ou 2. Cette méthode de vote est en fait le vote trichotomique de domaine de définition $K_p([\![-2; 2]\!])$. Si l'on modifie l'échelle de notes pour passer de $\{0, 1, 2\}$ à $\{-1, 0, 1\}$, d'un point de vue purement mathématique les écarts de notes vont être identiques dans les deux échelles et bien que l'on ait changé d'échelle de notes, la méthode d'agrégation est la même : c'est le vote trichotomique.

— Considérons cette fois-ci les deux échelles de notes suivantes : $\{0, 1, 2\}$ et $\{0, 2, 4\}$. La première échelle correspond au vote trichotomique alors que la deuxième échelle construit une méthode d'agrégation dont le domaine de définition est $K_p(\{-2, 0, 2\})$. Ces méthodes d'agrégation sont donc bien différente, cependant elles amènent toutes les deux au même classement ordinal d'une part et d'autre part les rapports de force de préférence sont tous égaux.

Ces exemples nous incitent à poser la définition suivante de méthodes d'agrégation équivalentes.

Définition :
Soient f et f' deux méthodes d'agrégation de domaines de définition respectif D et D'. Nous dirons que f et f' sont équivalentes si elles engendrent le même classement cardinal des alternatives dans le sens où d'une part le classement ordinal est strictement le même, et d'autre part les rapports de forces de préférences sont égaux.

Pour cela notons $\mathscr{P}_B$ l'ensemble des parties bornées de $K_p(\mathbb{R})$, et faisons agir le groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $\mathscr{P}_B$ de la manière suivante : $\begin{array}{cccccc} \Psi : & \mathbb{R}_+^* & \times & \mathscr{P}_B & \longrightarrow & \mathscr{P}_B \\ & (\lambda & , & D) & \mapsto & \lambda D \end{array}$

Les orbites $\mathbb{R}_+^*.D = \{\lambda D, \lambda \in \mathbb{R}_+^*\}$ sont des classes d'équivalences et forment une partition de $\mathscr{P}_B$.

Nous noterons $f \sim f'$ ou par abus $D \sim D'$, lorsque D et D' sont dans la même orbite, c'est à dire lorsqu'il existera $\lambda > 0$ tel que $D' = \lambda D$.

Trois remarques :
— $D' = \lambda D$ nous assure que les rapports de forces de préférences vont être conservés.
— Le classement ordinal de deux méthodes d'agrégation équivalentes est quant à lui préservé du fait que λ soit strictement positif.
— Aucune des méthodes de vote cardinal étudiées précédemment ne sont équivalentes.

II.5 Topologie de l'espace des fonctions d'agrégations cardinales

Il est à noté que les résultats présentés ci-dessous n'ont pas de lien direct avec la quasi-universalité des méthodes de vote cardinales, cependant ils apportent un éclairage nouveau sur la façon dont ces méthodes interagissent entre elles. En effet nous allons construire une topologie sur l'ensemble des fonctions d'agrégations cardinales pour laquelle le range-voting est la limite des votes k-chotomiques à équivalence près.

II.5.1 La topologie de la fonction indicatrice

Comme nous l'avons bien compris maintenant les fonctions d'agrégations étant totalement définies par leur domaine de définition, définir une topologie sur les fonctions d'agrégation cardinales c'est en fait le faire sur l'ensemble des domaines de définitions de ces fonctions. Il faut donc mettre une topologie sur l'ensemble des parties de $K_p(\mathbb{R})$.

Cependant chaque partie de $K_p(\mathbb{R})$ peut se décrire comme un certain $K_p(D)$, où D est une partie symétrique de $\mathbb{R}$ contenant obligatoirement 0. (*D est symétrique et contient* 0 *puisqu'elle correspond aux écarts de préférences qu'autorise la méthode d'agrégation.*)

Au final mettre une topologie sur l'ensemble des fonctions d'agrégation cardinales revient à mettre une topologie sur l'ensemble des parties symétriques de $\mathbb{R}$.

Or il existe une topologie simple sur l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$: la topologie de la convergence simple pour les fonctions indicatrices.

Plus exactement nous dirons qu'une suite (D_n) de parties de $\mathbb{R}$ converge vers D si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |\mathbb{1}_{D_n}(x) - \mathbb{1}_D(x)| < \epsilon$.

II.5.2 Le range voting comme limite simple du vote k-chotomique

Maintenant que nous possédons une topologie sur l'espace des fonctions d'agrégation cardinales, la suite des méthodes de vote k-chotomiques semble être un bon candidat pour tester cette notion de convergence.

Notons :
— f_k le vote k-chotomique ayant pour domaine de définition $K_p([\![-k;k]\!])^n$
— $f_{\mathbb{N}}$ le vote $\mathbb{N}$-chotomique ayant pour domaine de définition $K_p(\mathbb{Z})^n$
— $f_{[0;1]}$ le range voting ayant pour domaine de définition $K_p([-1;1])^n$

De manière assez évidente, $\mathbb{1}_{[\![-k;k]\!]}$ converge simplement vers $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}$. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$, et $\epsilon > 0$,
— Si $x \notin \mathbb{Z}$ alors $|\mathbb{1}_{[\![-k;k]\!]}(x) - \mathbb{1}_{\mathbb{Z}}(x)| = |0-0| < \epsilon$
— Sinon $x \in \mathbb{Z}$ et $\forall k \geq |x|, |\mathbb{1}_{[\![-k;k]\!]}(x) - \mathbb{1}_{\mathbb{Z}}(x)| = |1-1| < \epsilon$

Le vote $\mathbb{N}$-chotomique est donc la limite du vote k-chotomique lorsque k tend vers $+\infty$ ($\lim\limits_{k \to +\infty} f_k = f_{\mathbb{N}}$), cependant le vote $\mathbb{N}$-chotomique n'est pas une bonne méthode d'agrégation car elle n'a pas un domaine de définition borné. Remarquons que ce dernier résultat implique que l'ensemble des bonnes méthodes d'agrégation à domaine de définition borné n'est pas un fermé pour la topologie que nous considérons ici.

Notons alors $f_k^* = \frac{1}{k} f_k$. f_k^* est uen méthode d'agrégation cardinale équivalente à f_k, son domaine de définition est $K_p(\frac{1}{k}[\![-k;k]\!])^n$; et puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{1}_{\frac{1}{k}[\![-k;k]\!]}$ converge simplement vers $\mathbb{1}_{[0,1]}$,c'est à dire que $lim_{k \to +\infty} f_k^* = f_{[0;1]}$.

Nous pouvons donc considérer le range voting comme étant la méthode limite du vote k-chotomique lorsque k tend vers $+\infty$.

III Universalité et quasi-universalité

Nous nous proposons maintenant de définir une notion de quasi-universalité. Une fonction d'agrégation f vérifie le principe d'Universalité si les votants ne sont en aucun cas restreints dans le classement des candidats. Cependant cette propriété n'est pas vérifiable par les méthodes d'agrégations cardinales. Aucune d'entre elles n'est Universelle, mais certaines octroient assez de liberté aux votants pour les considérer comme quasi-universelles.

Nous allons tout d'abord introduire la notion de floutage d'une matrice de préférences cardinales puis nous définirons mathématiquement la propriété de quasi-universalité d'une méthode d'agrégation cardinale.

III.1 Fonction de floutage

Introduisons le principe à l'aide d'une image, ou plutôt de la photo d'un paysage. Vous possédez la photo d'un paysage, cette photo n'est qu'une image du paysage réel avec un certain degré de flou qui va correspondre au nombre de pixels de la photo (si elle est numérique), mais à partir de cette photo existante il est impossible d'améliorer la qualité de la photo, la seule possibilité est de la rendre plus floue en diminuant le nombre de pixels. De la même manière nous allons flouter des matrices de préférences cardinales en considérant que deux alternatives vont être indifférentes si leur force de préférences est inférieure à un certain seuil fixé par la fonction de floutage.

Notons $K = (k_{ij})$ une matrice de préférences cardinales, x une alternative et f un réel positif, et définissons $\chi_{x,f}(K) = (k'_{ij})$ une nouvelle matrice cardinale floutée en x avec la force f de la manière suivante :

$$k'_{jx} = \begin{cases} max(0, k_{jx} - f) \text{ si } k_{jx} \geqslant 0 \\ min(0, k_{jx} + f) \text{ sinon} \end{cases} \tag{1}$$

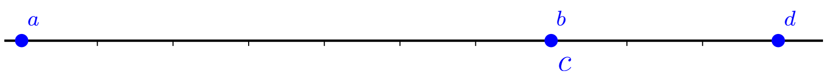
les autres coefficients se recalculant à l'aide de la propriété additive des matrices de préférences cardinales. En particulier toutes les alternatives surclassant x ou surclassées par x avec une force inférieure à f seront considérées comme indifférentes à x.

Remarquons que si $\lambda > 0$, on a l'égalité $\chi_{x,\lambda f}(\lambda K) = \lambda.\chi_{x,f}(K)$

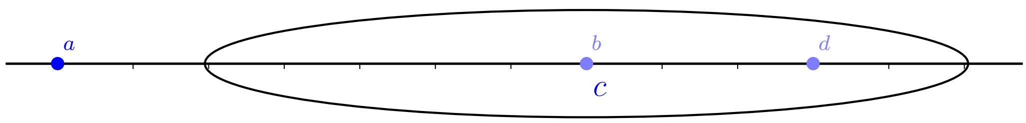
Voyons un exemple :

Considérons la matrice de préférences cardinales suivante,

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -7 & -7 & -10 \\ 7 & 0 & 0 & -3 \\ 7 & 0 & 0 & -3 \\ 10 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

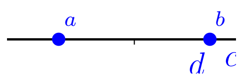


Si l'on floute en b avec une force de 5 de la façon suivante :



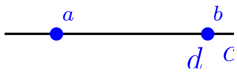
on obtient :

$$K' = \chi_{2,5}(K) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$



et l'on peut encore par exemple flouter en a avec une force de 1 pour obtenir :

$$K'' = \chi_{1,1}(K') = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



III.2 Propriété de quasi-universalité

Voici maintenant la définition de la propriété de quasi-universalité d'une fonction d'agrégation sociale f :

> f respecte la propriété de quasi-universalité si et seulement si pour toute matrice non nulle de préférences cardinales $K \in K_p(\mathbb{R})$, il existe un coefficient de dilatation $\lambda > 0$ et une suite finie de fonctions de floutage $(\chi^1, ..., \chi^m)$ telle que $\chi^1 \circ ... \circ \chi^m(\lambda K)$ soit non nulle et appartienne au domaine de définition de f.

Remarquons pour commencer que si une fonction d'agrégation f est universelle, alors elle est aussi quasi-universelle.

Nous retirons de la définition de quasi-universalité la matrice nulle car toute matrice de préférences cardinales K admet une fonction de floutage χ telle $\chi(K) = 0$ (il suffit de prendre le coefficient de floutage $f \geqslant max(k_{ij})$) et dans ce cas toute fonction d'agrégation serait quasi-universelle. La propriété de quasi-universalité a comme objectif principal de s'assurer qu'un votant puisse adapter au mieux sa matrice de préférences cardinales à la méthode de vote. Si un votant possède une matrice de préférence $K \neq 0$ cela signifie qu'il a des préférences réelles entre les alternatives, dans ce cas il serait dommage que la seule matrice acceptable par la méthode d'agrégation qui lui convienne soit la matrice nulle, car ce votant voterait blanc et ne pourrait pas réellement traduire ses préférences lors du vote.

Le coefficient de dilatation λ quant à lui sert à ramener la matrice des préférences du votant dans les mêmes unités que celles utilisées par la méthode d'agrégation, ainsi les matrices de préférences de tous les votants seront commensurables.

Ainsi définie la propriété de quasi-universalité oblige la fonction d'agrégation de permettre à tout votant n'étant pas totalement indifférent à l'ensemble des candidats (c'est à dire que sa matrice $K \neq 0$) d'exprimer au mieux ses préférences à travers une matrice floutée non nulle.

III.3 Tour d'horizon des méthodes de votes - étude de leur quasi-universalité

Nous allons effectuer un deuxième tour d'horizon des méthodes d'agrégation vues précédemment et voir si elles respectent le principe de quasi-universalité.

III.3.1 Le scrutin majoritaire uninominal à un tour

Le scrutin majoritaire uninominal à un tour possède le plus petit des domaines de définition. Il réduit donc au stricte minimum les préférences individuelles, et nous allons voir que pour plus de trois alternatives, cette méthode ne respcete pas le principe de quasi-universalité.

En effet, prenons l'exemple d'une élection dans laquelle trois candidats a, b, c se présentent et considérons la matrice suivante des préférences d'un votant : $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -10 \\ 10 & 10 & 0 \end{pmatrix}$.

Le votant est indifférent entre les candidats a et b et les préfère de manière substantielle au candidat c. Cette matrice de préférences cardinales n'est pas admissible par la fonction d'agrégation associée au scrutin majoritaire uninominal à un tour, pourtant la seule matrice floutée ayant pour antécédent K est la matrice nulle, car aucune fonction de floutage ne pourra séparer les candidats a et b, donc le scrutin majoritaire uninominal à un tour ne vérifie pas la propriété de quasi-universalité. Puisque notre votant est indifférent entre les candidats a et b et qu'il doit en choisir un seul, il ne lui reste que trois possibilités :

- Tout d'abord il peut voter blanc s'il veut rester sincère et ne peut donc pas véritablement exprimer ses préférences,
- sinon il peut décider de glisser tout de même dans l'urne le bulletin "a",
- enfin il peut décider de glisser tout de même dans l'urne le bulletin "b".

Notons p la probabilité que le votant vote blanc, $p(A)$ (resp $p(B)$) la probabilité qu'il vote pour le candidat a (resp b), alors puisque notre votant est indifférent entre a et b, $p(A) = p(B) = \dfrac{1-p}{2}$.

Dans le meilleur des cas, $p = 0$ et chacun des candidats perd la moitié des voix parmi les votants indifférents, dans le pire des cas ni a ni b ne gagne de voix.

La faille du scrutin majoritaire uninominal à un tour semble être la pauvreté de son domaine de définition. Celui-ci est trop restrictif et ne semble pas être à même de refléter correctement les préférences des individus.

III.3.2 le vote par approbation

Le vote par approbation tente de pallier ce problème sans non plus donner trop de liberté au votant. Démontrons maintenant , à l'instar du scrutin uninominal majoritaire à un tour, que le vote par approbation vérifie le principe de quasi-universalité.

En effet, soit $K \neq 0$ la matrice des préférences cardinales d'un votant, si l'on pose :

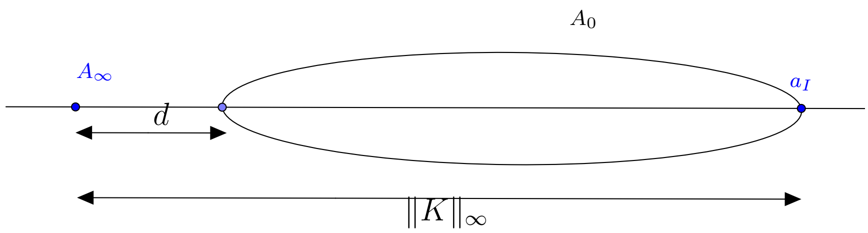
- $\|K\|_\infty = \max\limits_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} |k_{ij}| = \max\limits_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} k_{ij} > 0$ la norme sup de la matrice K,
- $X = \{a_1, ...a_p\}$, l'ensemble de toutes les alternatives,
- $A_\infty = \{a_j \in X, \exists i \in [\![1,p]\!], k_{ij} = \|K\|_\infty\}$

Il est clair que A_∞ est non vide par définition de la norme sup, et que tous les éléments de A_∞ sont indifférents entre eux ; en effet dans le cas contraire il existerait deux alternatives a_j et $a_{j'}$ éléments de A_∞ tels que $k_{jj'} > 0$, or il existe une autre alternative a_i pour laquelle $k_{ij} = \|K\|_\infty$, donc $k_{ij'} = k_{ij} + k_{jj'} > \|K\|_\infty$ ce qui est impossible.

De plus, tous les éléments de A_∞ surclassent strictement les autres alternatives ; en effet dans le cas contraire, considérons $a_{j'}$ une alternative surclassant un élément a_j de

A_∞, alors $k_{jj'} \geqslant 0$ or il existe une alternative a_i pour la quelle $k_{ij} = \|K\|_\infty$ donc $k_{ij'} = k_{ij} + k_{jj'} \geqslant \|K\|_\infty$. Par définition de la norme supp nous obtenons que $k_{ij'} = \|K\|_\infty$ et donc $a_{j'} \in A_\infty$.

A_∞ est en fait l'ensemble de toutes les alternatives les mieux classées par notre votant. Notons alors $A_0 = X \setminus A_\infty$ et posons $d = \min\limits_{a_j \in A_\infty, a_i \in A_0} k_{ij}$ la distance entre A_0 et A_∞. Notons maintenant a_J un élément de A_∞ et a_I un élément de A_0 pour lequel $k_{IJ} = \|K\|_\infty$.



Floutons la matrice K en a_I avec la force $\|K\|_\infty - d$. Dès lors, toutes les alternatives de A_0 sont d'une part indifférentes entre elles et d'autre part elles sont à la distance d des alternatives de A_∞. Il ne reste plus qu'à diviser par d pour ramener la distance entre A_0 et A_∞ à 1.

Conclusion, la matrice floutée $K' = \frac{1}{d}\big(\chi_{a_I,\|K\|_\infty - d}(K)\big) = \chi_{a_I,\frac{\|K\|_\infty - d}{d}}(\frac{1}{d}K) = \sum\limits_{i \in A_\infty} E_j$, donc K' est bien une matrice floutée de la matrice K qui appartient au domaine de définition du vote par approbation. Le vote par approbation est donc bien une méthode d'agrégation vérifiant le principe de quasi-universalité.

III.3.3 La méthode de Borda

La méthode de Borda n'est clairement pas quasi-universelle, en effet elle oblige le votant à classer strictement les n premières alternatives, donc si celui-ci est indifférent entre deux d'entre elles il lui sera impossible d'obtenir, même après floutage, une matrice appartenant au domaine de définition de la méthode de Borda.

Remarquons que pour $n = 1$ la méthode de Borda est identique au scrutin majoritaire uninominal qui n'était déjà pas quasi-universelle.

III.3.4 Le vote k-chotomique

Soit $k \leq p$, le vote k-chotomique est une généralisation du vote par approbation (vote par approbation = vote dichotomique). De plus le domaine de définition de la méthode $(k+1)$-chotomique contient le domaine de définition de la méthode k-chotomique, en particulier toutes les méthodes k-chotomiques contiennent le domaine de définition du vote par assentiment (k=2), elles vérifient donc toutes la propriété de quasi-universalité.

III.3.5 Le range-voting

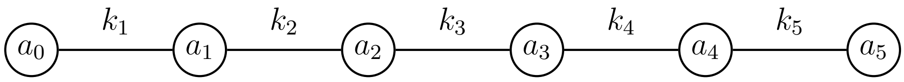
Rappelons que le domaine de définiton du range-voting est $K_p([-1,1])^n$ et comme pour le vote k-chotomique, il contient aussi le domaine de définition du vote par assentiment. Le range-voting vérifie donc lui aussi la propriété de quasi-universalité

III.4 Description des méthodes d'agrégation quasi-universelles

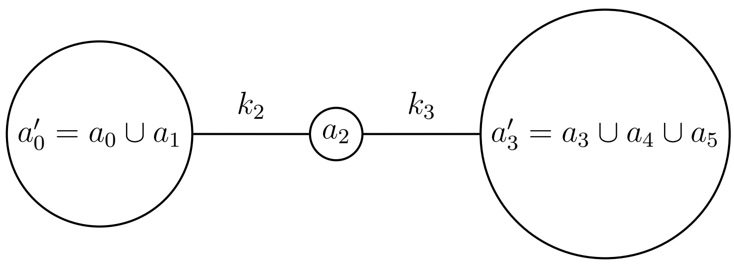
Il est clair que la propriété de quasi-universalité ne s'intèresse aucunement à la façon dont on agrège les matrices de préférences cardinales, mais seulement au domaine de définition des méthodes d'agrégation.

Considérons la matrice des préférences cardinales d'un votant, il est alors possible de la représenter sous la forme d'un chapelet de bulles de la façon suivante : chaque bulle est la classe d'indifférence d'une alternative, l'écart de préférence entre deux classes d'indifférences (deux bulles) est alors égal à l'écart de préférence entre une alternative quelconque de la première classe d'indifférence est une autre de la seconde. Ainsi regroupées les bulles d'indifférences forment entre elles non plus un préordre mais un ordre total sur l'ensemble des classes d'alternatives.

Voici par exemple la représentation en chapelet de bulles d'un préordre cardinal à six classes d'équivalences :



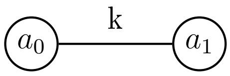
Flouter une matrice de préférences cardinales c'est exactement regrouper plusieurs bulles adjacentes en une seule et unique bulle. Ci-dessous nous avons regroupé les deux premières bulles ainsi que les trois dernières pour obtenir un chapelet "flouté" de trois bulles d'indifférences.



Il nous reste alors à faire trois remarques.

— Le chapelet à une bulle correspond à la matrice de préférences cardinalas $K = 0$ c'est à dire lorsque toutes les alternatives sont indifférentes entre elles.
— Tout chapelet de bulles non associé à la matrice nulle peut être flouté en un chapelet contenant uniquement deux bulles séparées pas l'écart de préférence que l'on veut.
— Les chapelets à deux bulles ne peuvent pas être floutés sans obtenir au final la matrice nulle.

Notons alors D_k l'ensemble de tous les chapelets à deux bulles séparées par l'écart de préférence k. Remarquons que $\{D_k, k \in \mathbb{R}_+^*\}$ n'est rien d'autre que la classe d'équivalence du vote par assentiment.



Nous obtenons alors les deux résultats suivants liés à la description des méthodes de vote quasi-universelle :

<u>Théorème :</u>
Une méthode d'agrégation cardinale f de domaine de définition D est quasi-universelle si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}_+^*, D_k \subseteq D$

<u>Corollaire :</u>
A équivalence près, le vote par approbation est la plus petite des méthodes de vote quasi-universelle (dans le sens de l'inclusion des domaines de définition)

IV Conclusion

Aucune méthode d'agrégation ne peut totalement vérifier la propriété d'universalité sans danger, entre autre des problèmes de d'incommensurabilité et de manipulabilité. La propriété de quasi-universalité permet de détecter les méthodes qui, malgré les restrictions apportées à leur domaine de définition, offrent un choix de matrices de préférences assez large de sorte qu'un votant puisse trouver dans le domaine de définition de la méthode d'agrégation une matrice de préférences qui lui convienne, et ainsi lui permette de ne pas voter blanc.

Nous remarquons alors que les méthodes de type Borda, dont le scrutin majoritaire uninominal est un cas particulier, ne vérifient pas le principe de quasi-universalité. A contrario, les méthodes k-chotomique, peu connues et peu utilisées de nos jours vérifient toutes le principe de quasi-universalité.

De là à désigner une méthode k-chotomique meilleure que les autres, la question est délicate : il est clair que si k est trop grand la méthode devient trop facilement manipulable, mais à combien est la limite ?

— Le vote par approbation, en sa qualité de "plus petite méthode de vote quasi-universelle", possède une place privilégiée parmi les "bonnes méthodes de vote k-chotomique".
— Le vote trichotomique semble être une bonne alternative, le découpage en trois classes découlant d'un classement du type "j'aime" , "je suis indifférent", "je n'aime pas".
— Nous pourrions aller jusqu'à $k = 5$ avec un classement du type "j'adore" , "j'aime" , "je suis indifférent", "je n'aime pas trop" , "je déteste".
— Au delà de 5 les méthodes k-chotomiques semblent difficilement utilisables.

Dans tous les cas, malgré les nombreux papiers listant les avantages du vote k-chotomique (et plus particulièrement du vote par approbation[1]) par rapport au vote uninominal,

1. Nous pensons évidemment à Brams et Fishburn pour leur incontournable papier : " *Approval voting*", mais tant d'autre ont écrit sur le sujet qu'il est difficile de les lister tous. Parmi eux citons Alos-Ferre pour leur caractérisation du vote par approbation, et J.S Kelly pour son travail sur la manipulabilité et le vote par approbation.

l'État Français ne semble pas pressé de changer la façon de voter lors des élections présidentielles. Serait-ce parce que, compte-tenue du côté linéaire de la répartition des candidats allant d'extrême gauche à extrême droite, dans ce genre de méthode de vote, les candidats du centre seraient favorisés. En tout cas c'est ce que tend à suggérer l'expérimentation "grandeur nature" qui a eu lieu lors de l'élection présidentielle de 2012 en France. En effet, en même temps que l'élection présidentielle du 22 avril 2012, se sont déroulées dans certaines communes de France de fausses élections présidentielles expérimentales basées sur d'autres méthodes de vote notamment le vote par approbation et le vote 5-chotomique. Il en ressort que les résultats de ces fausses élections étaient clairement différents des résultats de l'élection officielle faisant même, pour certaines d'entre elles, de Francois BAYROU notre président de la République. Dans ces conditions on peut imaginer que ni la Gauche ni la Droite ne soit emballé par ce système de vote. Ne nous méprenons pas, il n'est pas question ici de prendre parti pour un groupe ou courant de pensé politique mais plutôt de prendre le parti de la Démocratie. Lors des prochaines élections Présidentielles de 2017, une nouvelle expérimentation grandeur nature devrait avoir lieu. Ce sera l'occasion de voir si les résultats de 2012 se confirment.

Pour finir, lançons un appel à plus de Démocratie : chacun d'entre nous peut à son niveau proposer l'alternative du vote k-chotomique à son entourage lors de tous types d'élections où la Démocratie à sa place. Peut être qu'avec le temps le vote k-chotomique entrera dans les mœurs ?

V Bibliographie

— Alancud JCR, Laruelle A (2013) *Dis&approval voting : a characterization*, Social choice and Welfare vol 43 - p 1.

— Alos-Ferre C (2006) *A simple characterization of approval voting*, Social choice and Welfare vol 27 - p 621.

— Arrow K.(1963) *Social choice and individual values.* John Wiley and Sons, Inc., New York, London, Sydney.

— Baujard A, Gravel F, Igersheim H, Laslier F, Lebon I (2013) *Vote par approbation, vote par note - Une expérimentation lors de l'élection présidentielle du 22 avril 2012*, Revue Economique vol 64 No.2 (mars 2013)

— Brams, S. J. and Fishburn, P. C. (1983) *Approval Voting*, Boston, Birkhauser.

— Duncan, O. D. (1984), *Notes on Social Measurement : Historical and critical*, New York, Russell Sage Foundation.

— Durand S.(2000), *Sur quelques paradoxes en théorie du choix social et en décision multicritère*, Thèse de troisième cycle, Université Joseph-Fourier-Grenoble 1 - sciences et géographie, 2000

— Gaertner W. (2009) *A Primer in Social Choice Theory.* Oxford University Press

— Hillinger C. (2004) *Voting and the cardinal Agregation of judgements.* on line at http ://epub.ub.uni-muenchen.de/353/

- Kelly Jerry S. (1988) *Social Choice Theory-An Introduction.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg
- Luce R.D. (1956) *Semiorders and a theory of utility discrimination.* Econometrica 24, Journal of the Econometric Society, 1956.
- Marquis de Condorcet,(1785) *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralités des voix*, Paris
- May,K.O. (1952) *A Set of Independant Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision.* Econometrica vol 20
- Smith, W. D. (2000), Range voting.