

Man verfolgt dabei zweckmässig die Axe des Weges statt seiner Randlinie. Jene Möglichkeit beruht auf der Wahrheit, dass so lange man den Ausgang noch nicht erreicht hat, ein bereits durchlaufenes Stück der Wegeaxe nothwendig von noch nicht beschriebenen Theilen derselben getroffen werden muss, weil sonst jenes Stück in sich abgeschlossen wäre und mit dem Eingangswege nicht zusammenhinge. Man markire sich daher den Weg, den man zurücklegt nebst dem Sinne, in welchem es geschieht. Sobald man auf einen schon markirten Weg stösst, kehre man um und durchschreite den schon beschriebenen Weg in umgekehrtem Sinne. Da man, wenn man nicht ablenkte, denselben hierbei in seiner ganzen Ausdehnung nochmals zurücklegen würde, so muss man nothwendig hierbei auf einen noch nicht markirten einmündenden Weg treffen, den man dann verfolge, bis man wieder auf einen markirten trifft. Hier kehre man wieder um und verfähre wie vorher. Es werden dadurch stets neue Wegtheile zu den beschriebenen zugefügt, so dass man nach einer endlichen Zeit das ganze Labyrinth durchwandern würde und so jedenfalls den Ausgang fände, wenn er nicht schon vorher erreicht worden wäre.

Carlsruhe, December 1871.

Ueber die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren.

VON CARL HIERHOLZER.

Mitgetheilt von CHR. WIENER*).

In einem beliebig verschlungenen Linienzuge mögen *Zweige* eines Punktes diejenigen verschiedenen Theile des Zuges heissen, auf welchen man den fraglichen Punkt verlassen kann. Ein Punkt mit mehreren Zweigen heisse ein *Knotenpunkt*, der so vielfach genannt werde, als

*) Die folgende Untersuchung trug der leider so früh dem Dienste der Wissenschaft durch den Tod entrissene Privatdocent Dr. Hierholzer dahier (gest. 13. Sept. 1871) einem Kreise befreundeter Mathematiker vor. Um sie vor Vergessenheit zu bewahren, musste sie bei dem Mangel jeder schriftlichen Aufzeichnung aus dem Gedächtniss wieder hergestellt werden, was ich unter Beihilfe meines verehrten Collegen Lüröth durch das Folgende möglichst getren auszuführen suchte.

die Anzahl der Zweige angiebt, und je nach dieser Anzahl als gerad oder ungerad genannt sein soll. Ein gewöhnlicher Doppelpunkt wäre hiernach ein vierfacher Knotenpunkt, ein gewöhnlicher Punkt kann als ein zweifacher und eine freie Endigung als ein einfacher Knotenpunkt bezeichnet werden.

Wenn ein Linienzug in einem Zuge umfahren werden kann, ohne dass irgend ein Linienstück mehrfach durchlaufen wird, so hat er entweder keinen oder zwei ungerade Knotenpunkte. Wenn man beim Durchlaufen irgend einen Punkt überschreitet, so sind dadurch zwei Zweige eines Knotenpunktes beschrieben, und da keine Strecke zweimal durchlaufen werden soll, muss ein Punkt, den man im Ganzen n mal überschreitet, ein $2n$ facher Knotenpunkt sein. Ein Punkt kann daher nur dann ein ungerader Knotenpunkt sein, wenn er beim Durchlaufen einmal nicht überschritten wird, d. h. wenn er Anfangs- oder Endpunkt ist. Wenn man daher beim Durchlaufen zu dem Ausgangspunkte bei dem Schlusse zurückkehrt, so können nur gerade Knotenpunkte vorhanden sein; wenn nicht, so sind Ausgangs- und Endpunkt ungerade Knotenpunkte.

Umgekehrt: *Wenn ein zusammenhängender Linienzug keinen oder zwei ungerade Knotenpunkte enthält, so kann er in einem Zuge umfahren werden.*

Denn a) hat man irgend einen Theil des Linienzuges umfahren, so ist jeder Knotenpunkt im noch nicht durchfahrenen Theile gerad oder ungerad, wie er es im ganzen Zuge war; nur der Anfangs- und Endpunkt des durchlaufenen Stücks kehren ihren Charakter um, ausser wenn sie zusammenfallen. Denn durch das Durchlaufen eines Punktes werden zwei Zweige, durch den Anfang und das Ende des Durchlaufens je ein Zweig ausgeschlossen.

b) Hat man einen Linienzug in einem ungeraden Knotenpunkt zu umfahren angefangen, so kann man nur in einem andern ungeraden Knotenpunkte stecken bleiben. Denn in einem geraden Knotenpunkte hat man bei jedesmaligem Durchlaufen zwei Zweige ausgeschlossen, so dass bei erneutem Ankommen in demselben wenigstens noch ein Zweig zum Verlassen übrig bleibt. Der Anfangspunkt ist aber durch den Beginn zu einem geraden Knotenpunkte verwandelt worden, so dass auch in ihm ein Steckenbleiben nicht möglich ist. Fängt man dagegen einen Linienzug in einem geraden Knotenpunkte zu umfahren an, so kann man auch in diesem stecken bleiben, indem er durch den Beginn zu einem ungeraden verwandelt wurde.

c) Hat nun ein Linienzug zwei ungerade Knotenpunkte, so beginne man das Umfahren in einem derselben; man wird dann nothwendig in dem andern stecken bleiben. Der zurückgelegte Linienzug ist in diesem Falle ein offener. Hat der gegebene Linienzug dagegen keine

ungeraden Knotenpunkte, so beginne man das Umfahren in einem beliebigen Punkte, der also ein gerader Knotenpunkt ist; man wird dann nothwendig im Ausgangspunkte stecken bleiben. Der zurückgelegte Linienzug ist in diesem Falle ein geschlossener.

d) Bleibt dabei ein Theil b undurchlaufen, so kann derselbe nur gerade Knotenpunkte enthalten, weil die zwei etwa vorhandenen ungeraden Knotenpunkte durch das erste Umfahren ausgeschlossen wurden, und die übrigen Knotenpunkte ihren Charakter behielten. Zugleich muss b mit dem schon beschriebenen Zuge a durch wenigstens einen gemeinsamen Punkt zusammenhängen, weil sonst der Zug in mehrere nicht zusammenhängende zerfallen würde. Geht man beim Umfahren des a in einem solchen Punkte P des Zusammenhangs auf b über, so muss man nothwendig auf b in P stecken bleiben, und kann von da das Umfahren des a so fortsetzen, wie es früher geschehen war. Auf dieselbe Weise hängt man jedes noch nicht umfahrene Stück an die schon umfahrene an und beschreibt so die ganze Linie in einem Zuge.

Es ergibt sich noch folgender Satz: *Ein Linienzug kann nur eine gerade Anzahl ungerader Knotenpunkte besitzen.* Denn schaltet man durch Umfahren ein Liniestück aus, indem man in einem ungeraden Knotenpunkte beginnt und so lange weiter geht, bis man stecken bleibt, was wieder in einem ungeraden Knotenpunkte geschehen muss, und entfernt dadurch zwei ungerade Knotenpunkte; so kann man durch Wiederholung die Anzahl der ungeraden Knotenpunkte auf weniger als zwei vermindern. Dieser Rest kann aber nicht Eins, sondern muss Null sein; denn wenn ein Zug nur einen ungeraden Knotenpunkt besäße und man würde in ihm anfangen den Zug zu umfahren, so könnte man nie zu Ende kommen, da dies nur in einem andern ungeraden Knotenpunkte möglich ist. Die Zahl der ungeraden Knotenpunkte des ursprünglichen Linienzuges ist daher eine gerade.

Carlsruhe, im December 1871.

Anm. der Red. Der wesentliche Inhalt des Vorstehenden, nur in kürzerer Darstellung, zum Theil ohne nähere Ausführung der Beweise, findet sich in der leider wenig bekannten Abhandlung von Listing, *Vorstudien zur Topologie*, welche in den Göttinger Studien (Erster Bd., Göttingen 1847) erschienen ist. Vielleicht kann der vorstehende Aufsatz dazu dienen, die Aufmerksamkeit der Geometer auf diese auch in vielen andern Beziehungen inhaltreiche Arbeit wieder hinzu lenken.