Agrégation Interne
2010-2011
Rang, matrices et dualité

Série $n^0 1$

I Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K et B une base de E. Soient C une base du dual E^* et P la matrice de passage de la base duale de B, B^*, à C. Soit X la base préduale de C ($X^* = C$).
Exprimer en fonction de P la matrice de passage de B à X.

II Montrer que $Gl_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

III Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K. Montrer que les transvections engendrent $Sl(E)$.

IV Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K.
Montrer que $L(E)$ ne contient pas d'idéal bilatère propre.
Déterminer un idéal bilatère propre de $L(\mathbb{R}[X])$.

V a) Soit r le rang d'une famille $(v_i)_{1\leq i\leq p}$ d'éléments de $\mathbb{Q}^m$. Montrer que r est aussi le rang de cette famille considérée comme famille d'éléments de $\mathbb{C}^m$.
b) Montrer que si un système de n équations linéaires à m inconnues à coefficients dans $\mathbb{Q}$ admet des solutions dans $\mathbb{R}^m$, il est admet aussi dans $\mathbb{Q}^m$.

VI Soit $A \in M_n(K)$ une matrice sur un corps commutatif K et B sa comatrice.
Montrer que si A n'est pas inversible le rang de B est inférieur ou égal à 1 et qu'il vaut 1 si et seulement si A est de rang $n-1$.

VII a) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables à coefficients complexes est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
b) Donner une matrice appartenant à $M_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas limite d'une suite de matrices diagonalisables réelles.

VIII Quelles sont les parties connexes parmi :
$Gl_n(\mathbb{C})$, $Gl_n(\mathbb{R})$, $SO_2(\mathbb{R})$, $H = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ A = {}^t A\}$?