

LA DIFFUSION DE LA NUMÉRATION DÉCIMALE DE POSITION

Michel SOUTIF

Introduction

Dès les premiers pas de l'écriture, vers -3300 en Sumer, la nécessité de traduire les nombres de façon matérielle par des petits cailloux, par des signes écrits dans l'argile des bulles-enveloppes, s'est avérée nécessaire et le choix d'une base pour simplifier la notation en regroupant les unités s'est aussitôt imposée. Presque toutes les civilisations¹ ont opté pour la base 10 dans la tradition du calcul sur les doigts des deux mains et nous nous placerons d'emblée dans ce cas. La manière de noter les chiffres peut alors se ramener à deux méthodes profondément différentes : le procédé de superposition ou la méthode de position.

a) Le procédé de superposition : chaque symbole a une valeur numérique propre, il représente l'unité, la dizaine, la centaine avec parfois des relais pour 5, 50... et l'écriture du chiffre consiste à poser autant de symboles qu'il est nécessaire pour que leur somme donne le nombre. Ainsi, en notation grecque, Δ représente 10, donc 40 s'écrira $\Delta\Delta\Delta\Delta$, ou, en latin, 15 s'écrit XV. Ce procédé, initié par les civilisations mésopotamiennes et égyptiennes, est celui de tous les pays méditerranéens et de l'Europe jusqu'à la fin du Moyen-Âge. Il oblige à inventer de nouveaux symboles chaque fois qu'on envisage une multiplicité supplémentaire et explique partiellement le vertige des grecs devant les grands nombres.

b) Le procédé de position : seuls les neuf chiffres des unités sont employés, mais leur valeur change suivant leur position écrite : ainsi le premier chiffre écrit à droite représente le nombre d'unités, le deuxième le nombre de dizaines, le troisième le nombre de centaines, etc. La graphie est extrêmement simple mais pose un redoutable problème : que faire lorsqu'une multiplicité est absente du nombre envisagé, comment noter cette absence qui ne pose aucun problème dans l'autre méthode ? C'est la naissance et l'évolution de cette deuxième méthode qui va faire l'objet de cet exposé².

¹ Celles qui ont choisi une autre base, 20 ou 60 par exemple, semblent avoir aussi fait une transposition anthropomorphique : voir G. Ifrah, *Histoire universelle des chiffres*, tome 1, p. 221.

² Il existe aussi une méthode mixte entre ces deux solutions : celle des astronomes babyloniens. Voir M. Soutif, *L'Asie Source de Sciences et de Techniques*, P.U.G., 1995, p. 147.

Les chiffres de la Chine

L'écriture en Chine apparaît beaucoup plus tard qu'en Mésopotamie ou en Égypte. Elle se répand rapidement pendant la deuxième période de la dynastie Shang, sous la forme des « os oraculaires », autour de la capitale, An Yang, vers -1350. Il s'agit de poser des questions aux Dieux, écrites sur des os plats (plastrons de tortue ou omoplates de mammifères) soumis à l'épreuve du feu.

De nombreux chiffres sont ainsi écrits en base 10 dès l'origine, c'est-à-dire avec seulement neuf chiffres mais en spécifiant après chaque chiffre la multiplicité par un nom qui n'intervient pas à proprement parler comme nombre. Ainsi pour 251, on écrira 2 centaines 5 dizaines 1 unité. Il n'y a alors aucun problème pour les multiplicités absentes. Plus tard, vers le milieu de la période Zhou, on commence à utiliser, pour faire des calculs, des tableaux plats ou des boîtes à casiers disposés en lignes et en colonnes, ancêtres lointains des bouliers, et que l'on appelle « damiers à calcul » (*Suan Pan*). Chaque colonne est affectée à une multiplicité et les chiffres sont constitués de bâtonnets dont la disposition, normalisée sous le grand empereur Qin (-221, -210), est la suivante :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
					┤	├	┘	┘

La notation est ainsi strictement de position puisque la valeur du chiffre dépend de la colonne où il apparaît et que celle-ci l'affecte à une multiplicité précise. Le problème de la multiplicité éventuellement absente est aussi résolu puisque la colonne correspondante apparaît vide. Cependant, lorsque le nombre va être transposé par écrit sur un document, il faudra prendre soin de ménager un vide pour noter cette absence, sinon les positions sont décalées, par exemple noter 303 sous la forme 3 3. Pour éviter la plupart des ambiguïtés pouvant naître d'une écriture trop rapide, apparaît alors la méthode du « Wei » qui consiste à placer les bâtonnets en position « zòng » (verticale) dans les colonnes de rang impair et en position « héng » (transversale) dans celles de rang pair. Ainsi un décalage accidentel d'un rang est aussitôt détecté. Par exemple, 33 s'écrit ≡ ||| mais 303 donne ||| |||. Ce système est stabilisé à partir du règne de l'empereur Qin³. Il est largement utilisé dans le *Jin Zhang Suan Shu* (Livre de calcul en neuf chapitres) qui est sans doute écrit au premier siècle avant J.-C. et dans le *Sun Zi Suan Jing* (Traité de calcul de maître Sun) cité de +280 à +470. Ce dernier ouvrage traite des quatre opérations, de la mesure d'aires et de volumes, des fractions et des racines carrées et donne des indications sur les poids et mesures et les masses volumiques de différents métaux, en utilisant systématiquement les chiffres en bâtonnets.

³ J. Needham, *Science and Civilisation in China*, Cambridge University Press, vol. III, p. 9-10.

L'usage du zéro moderne apparaît très tardivement⁴, puisque sa première apparition imprimée a été trouvée dans un ouvrage de 1247, le *Su Shu Jin Chang*, où le nombre 1 405 536 est écrit | ≡ ○ ≡ |||| ≡ T, mais une allusion à l'emploi d'un point pour signifier une multiplicité vide se trouve dans le *Kai Yuan Chan Jing* édité entre 718 et 729.

Les chiffres en Inde

Les débuts de l'écriture sont très retardés en Inde par l'hostilité des brahmanes qui tiennent à l'exclusivité de la transmission orale. Il faut attendre le règne du troisième empereur Maurya, Açoka (–269, –232), converti au bouddhisme, pour qu'apparaisse, d'abord sur des inscriptions lapidaires, l'écriture Brahmi de type syllabique. La fécondité de cette écriture a été prodigieuse⁵ et elle a diffusé à travers de nombreuses adaptations vers l'Asie centrale et du Sud-Est, sans compter du Nord au Sud de l'Inde. Cependant son origine est très peu claire. Une des hypothèses les plus probables la rattache aux écritures sémitiques, phénicien et araméen, bien qu'elle s'écrive de gauche à droite. À travers de nombreuses évolutions, en particulier les écritures Koushan et Gupta, la Brahmi conduit à l'écriture Nagari qui est à la base de l'écriture moderne de la langue Hindi. L'écriture même des chiffres suit une évolution analogue et nous verrons que les chiffres nagari conduisent aux chiffres arabes.

Mais avant d'évoquer ces évolutions purement scripturales, examinons les méthodes même de numération. Dès l'origine, la numération est décimale avec neuf chiffres de base mais elle n'est pas positionnelle et repose sur le principe de superposition, avec une foule de chiffres indépendants représentant les nombres :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	20	30	40	50	60	70	80	90
100	200	300	400	500	600	700	800	900
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000
...

Ainsi par exemple le nombre 24 400 s'écrit : le signe 20 000 + le signe 4000 + le signe 400. Bien évidemment, l'écriture du zéro est alors inutile.

Le désir de trouver les limites de l'« innombrable » (par exemple dans le *Bhagavat Gita*, dialogue de Krishna et d'Arjuna dans le *Mahabarhata*) pousse à donner des noms particuliers aux puissances de 10 de plus en plus élevées jusqu'à 10¹⁴⁰ (*asankhyeya*).

La première apparition⁶ de la numération de position se trouve dans un traité cosmologique Jaina, le *Lokavibhâga*, daté de l'année 380 de l'ère « Shaka », soit 458 de notre ère. Les chiffres y sont exprimés par leur nom sanscrit (*eka, dvi, tri, chatur*,

⁴ *Ibid.*, p. 12.

⁵ James G. Février, *Histoire de l'Écriture*, Payot, p. 343.

⁶ G. Ifrah, déjà cité, t. 1, p. 928.

pāncha...) dans l'« ordre de la position », et l'absence d'une puissance de 10 est notée « shunya » c'est-à-dire *vide*. Après cette date, on dispose d'interventions de plus en plus nombreuses de la notation positionnelle, par exemple dans le *Surya-siddhanta* de l'astronome Âryabhata (vers 510), l'inventeur des lignes trigonométriques modernes, puis du mathématicien Brahmagupta, qui donne la solution générale des équations du second degré et définit l'infini comme l'inverse du nombre nul.

L'apparition de cette notation positionnelle en 458 est-elle une invention spécifiquement indienne comme beaucoup d'auteurs le pensent ? Nous remarquons qu'elle intervient à peu près mille ans après la même découverte en Chine et utilise pour le zéro la même notation : le *vide*, que les Chinois. Elle se produit en outre à une période où les relations entre l'Inde et la Chine se sont multipliées.

Chassées par les turco-mongols, toute une série de populations d'Asie Centrale ont envahi l'Afghanistan puis l'Inde par le col de Khyber et la vallée de la rivière Kaboul : les Parthes, les Scythes poussant les Grecs de Bactriane puis les Koushans (population d'origine Iranienne nommée Yue Zhi par les Chinois), à partir de +50. Le royaume Koushan tourne autour de l'Himalaya. Il va de la vallée du Gange au Kashmir, à l'Afghanistan, à la mer Caspienne et à tout le bassin de Tarim jusqu'au Gansu. Il constitue un très puissant facteur d'échanges entre l'Inde et la Chine, jusqu'à son effondrement devant les Gupta en 320. En particulier, le roi Kanischka (+78, +144) favorise la diffusion du Bouddhisme qui va envahir l'Asie centrale. Pour les besoins de la connaissance des sutras, de grands centres de traduction sanscrit-chinois et réciproquement, parfois par l'intermédiaire du sogdien (langue des voyageurs de commerce sur la route de la soie), s'installent. Ils fonctionnent à Hotan dès 260, puis l'indien Kumarajiva crée à Kuqa une véritable usine à traductions (344-413). Des pèlerins chinois se rendent en Inde. L'illustre Fa Xian y séjourne de 399 à 412 avant de retourner à la cour des Wei du Nord. On ne peut qu'être frappé par la coïncidence de cette activité avec la prise en compte dans le *Lokavibhaga* de la numération type chinoise. Cela ne peut être une coïncidence.

L'apparition du zéro

La notation positionnelle soulève une difficulté technique. Le Blanc ou Vide (*shunya*) est une « notation » qui peut induire à confusion. Tout au moins faut-il la souligner ou l'entourer, à l'instar de la recette irlandaise de fabrication d'un pot métallique à bière : on prend un vide bien rond et on coule du métal autour. La notation de l'absence d'une multiplicité par un point ou un rond o apparaît pour la première fois dans le Sud Est asiatique⁷ :

- au Cambodge à Trapeang Prei : $\circ \cdot \xi$ (605 de l'ère Shaka) soit 683 ;
- à Sumatra à Palembang : $\circ \circ \xi$ (605 de l'ère Shaka) soit 683 ;

⁷ G. Coedes, À propos de l'origine des chiffres arabes, BLSOAS 1931.6, p. 323.

- encore à Palembang : ୨୦୨ (606 de l'ère Shaka) soit 684.

Cette notation diffuse dans la culture Champa vers 800 ou encore à Bali : ୩୦୦ (800 de l'ère Shaka) soit 878.

En Inde, la première inscription dont la date soit certaine, parce que gravée sur un monument, se trouve dans un long texte consacré à Vishnu, daté de l'année 933 de l'ère Vikrama soit 876 de notre ère : elle fait état de la donation au temple de Gwalior (Inde centrale) d'un terrain de 270 hasta de long et de 50 guirlandes de fleurs et l'on a : ୨୭୦ pour 270 et ୫୦ pour 50. Il pourrait y avoir des inscriptions plus anciennes sur du cuivre mais leur datation est sujette à caution.

G. Coèdes déduit de la présence du zéro en Asie du Sud-Est en 683 que l'Inde avait certainement inventé cette notation avant cette date malgré l'absence d'évidence et transféré l'idée dans des sortes de colonies. Or il est tout à fait faux de considérer l'ex-Indochine comme une colonie indienne. Certes les chiffres et l'écriture ainsi que la religion brahmanique sont venus d'Inde du Sud à travers l'activité des navigateurs du Fu Nan (Cambodge) ou du Champa (Annam) plus qu'à travers les navigateurs indiens peu nombreux, sauf beaucoup plus tard au moment de la dynastie tamoul des Cholas (985-1110). Mais l'essentiel de l'activité de ces contrées était sous contrôle chinois.

Le Nam-Viet a été conquis par les Han en -111 et divisé en sept commanderies. Il s'agissait au départ d'un protectorat laissant en place l'aristocratie Lac mais, après la révolte des sœurs Trung (40-42), toutes les instances politiques locales sont éliminées et remplacées par des Chinois. Après la décadence Han, des royaumes indépendants (le Lam Apo, le Champa, le Fu Nan) se forment transitoirement avec une activité tournée vers la mer, mais les Sui puis les Tang interviennent massivement à partir de 603 et il s'ensuit un très grand essor économique. Le Bouddhisme chinois (le chan ou zen) pénètre largement à partir de 580 et diffuse vers Sumatra, en particulier à Palembang. Il est tout à fait clair que la numération dans les activités économiques est essentiellement chinoise dans toute la péninsule indochinoise y compris au Cambodge, qui prend à cette époque le nom de Zhen La et se tourne vers la Chine⁸. Pourquoi dès lors refuser au génie des ethnies locales, sous le choc des civilisations indiennes et chinoises, d'avoir elles-mêmes inventé le zéro ?

Diffusion des connaissances indiennes vers les Arabes

Dès la mort du prophète (632), l'expansion arabe explose en Asie. La Mésopotamie (Kadasiya 637), l'Iran (Nihavend 642) puis Samarcande en 712 sont conquis jusqu'au coup d'arrêt de la bataille de Talas avec les Chinois en 751. Du côté de l'Inde, les conquérants occupent le Sindh en 712 mais ne franchissent pas le désert

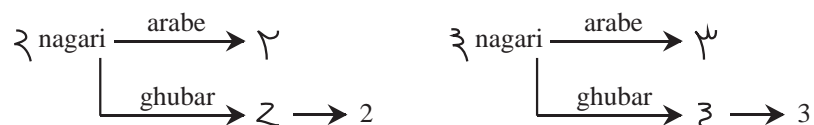
⁸ Claude Jacques, Chronologie du Pays Khmer, *Dossiers Archéologie*, 221 (1997), p. 9 ; Lê Trành Khôi, *Histoire du Vietnam*, Sudestasie, 1987.

de Thar. En 750, les Omeyyades sont supplantés par les Abbassides qui fondent une nouvelle capitale à Bagdad en 762. Les califes successifs et surtout Al Mamun (813-833) vont financer et encourager une extraordinaire activité intellectuelle dans le but affiché d'accroître le prestige et le rayonnement de l'Islam et d'apporter à travers la Science de nouvelles confirmations de la grandeur de Dieu. Une maison de la sagesse va réunir autour d'une grande bibliothèque, mathématiciens, astronomes, médecins et traducteurs. Tous les textes grecs sauvés par les Nestoriens d'Edesse et de Nisibe sont traduits du syriaque en arabe. Des spécialistes du Pehlvi et du Sanscrit comme Mohammed Al Fazari traduisent Aryabhata et Brahmagupta, et introduisent ainsi à Bagdad la numération décimale et l'usage du zéro.

À côté de ce travail de compilation, des chercheurs arabes mènent des travaux complètement originaux dans tous les domaines :

- en Mathématiques, Al Khwarizmi (780-850) pose les fondements de l'algèbre et popularise les notations indiennes ;
- en Astronomie, Thabit ibn Qurra (836-901) et ses descendants développent l'astronomie à partir de traductions de l'*Almageste* de Ptolémée, Nasir al Tusi réalise des tables astronomiques et, beaucoup plus tard, Al Kashi (1436) généralise la transformation chinoise de fractions en décimales ;
- en Physique, Ibn al Haytham (965-1039) ouvre la voie à l'optique moderne.

À travers l'usage qui s'en répand, les chiffres indiens se modifient, se simplifient ou changent leur orientation par rotation dans le plan (phénomène relativement fréquent comme celui qui vers -2800 voit tourner les pictogrammes sumériens de $\pi/2$ vers la droite, masquant ainsi leur sens primitif). On obtient deux sens différents, l'un qui reste au Proche-Orient et donne les chiffres arabes modernes, l'autre qui se généralise dans le Maghreb (chiffres ghubar), où l'Europe ira les chercher⁹. On aura par exemple :



Et au total, les deux séries :

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	arabe
1	2	3	4	5	6	7	8	9	ghubar

Introduction des chiffres « ghubar » en Europe

L'Europe du Moyen-Âge conserve la numération latine, numération de superposition, compliquée de soustractions : si LX représente $50 + 10$, XL représente

⁹ Voir G. Ifrah, déjà cité, t. 1, p. 879 à 887.

50 – 10 et permet d'éviter d'écrire XXXX et ainsi de suite. La première apparition de la numération décimale (sans le zéro) se trouve dans un manuscrit, le *Codex Vigilanus* écrit en 976 dans un monastère du nord de l'Espagne, le couvent d'Albelda. Cet ouvrage utilise les chiffres « ghubar ». Ce travail est remarqué par le moine Gerbert d'Aurillac qui devint le pape de l'an 1000 : Silvestre II.

La reconquête de l'Espagne n'interrompt pas la communication entre les Arabes et les Européens, au contraire. Dès la prise de Tolède en 1085 par Alphonse VI, l'évêque Raimond organise dans la ville un centre de traduction très actif entre les langues arabes, hébraïque et latine. L'anglais Adelard de Bath publie en 1130 *Algorithmi de numero Indorum* et une traduction d'Al Khwarizmi. Il explicite l'origine indienne de la méthode. Gerard de Cremona (1114-1187) traduit Ibn al Haytham, l'*Almageste*, et plus de 80 textes à Tolède.

La Sicile est reconquise par les Normands et Palerme prise en 1072. Pendant plus d'un siècle, les Hauteville font régner un ordre féodal teinté de coutumes musulmanes et s'emparent de Djerba, de Sousse, de Sfax. Ils font de la Sicile un lieu de civilisation mixte arabo-normande¹⁰ où les idées circulent librement. Parmi les nombreux marchands qui traversent fréquemment la Méditerranée, Leonardo Fibonacci de Pise rédige un traité d'arithmétique, le *Liber Abacci*, en 1202. Cet ouvrage, qui jouera un rôle moteur pendant tout le XIII^e siècle, décrit les « Novem figurae Indorum » avec le signe 0 que les arabes appellent « zephyrum ».

À la fin du XII^e siècle tous les grands maîtres arabes et leurs traductions du grec sont disponibles en latin, mais cette masse de connaissances reste pour l'essentiel totalement inexploitée.

Les maîtres de calcul au début de la Renaissance

La croissance de la production agricole à la fin du XII^e siècle ouvre un marché qui dépasse le cercle restreint du troc local. La diffusion de la monnaie métallique, les progrès de la navigation ouvrent un marché aux produits de luxe comme la soie ou les épices. L'Italie, grâce à sa position géographique, prend une place centrale dans les échanges à travers la Méditerranée vers l'Orient ou l'Afrique. Venise, Gênes, Pise et Florence s'organisent en fonction des besoins considérables en capitaux qu'exige le commerce maritime. Des associés fondent des compagnies qui investissent dans des succursales extérieures à l'Italie et l'achat de navires de commerce. Les bénéfices, les amortissements du capital, les risques et les pertes doivent être calculés et cette activité bancaire demande de bons comptables.

Pour former ceux-ci, des écoles privées s'ouvrent dans toute l'Italie : en 1338, Florence compte 1200 élèves en comptabilité. De nouvelles méthodes de calcul sur

¹⁰ Voir J.-M. Pesez, La Sicile arabe et normande, *Dossiers Archéologie*, 225 (1997), p. 118

papier vont remplacer les jetons, les bouliers et les écrits sur planchettes à poussière. Les professeurs font fortune. On connaît par exemple le détail de la succession de maître Paolo del Abacco, propriétaire d'une école vers 1350 : il possède deux maisons en ville et une à la campagne. Il a en outre un capital de 1000 florins (salaire annuel d'un domestique : 10 florins). Mais à partir de 1348, depuis Marseille, la peste noire ravage l'Europe. Les banques s'effondrent : à Florence les Bardi et les Perruzzi font faillite, victimes de leurs prêts. Les équipages meurent comme des mouches et tout va s'arrêter pour ne reprendre qu'un siècle après.

Au début du XV^e siècle tout redémarre et, cette fois-ci, c'est la Renaissance pour de bon. Cosme de Medicis constitue un empire (1389-1464) à Florence, les Fugger un autre à Augsbourg, à partir de l'argent des monts métallifères. Les fils de famille vont suivre les cours de calcul de maîtres qualifiés et ceux-ci vont être épaulés par une technique toute nouvelle : l'*imprimerie*.

Nicolas Chuquet est « écrivain » (professeur) à Lyon. Il publie en 1484 le *Triparty en la Science des nombres*. Pour gagner une large audience, le latin a été abandonné pour la langue vernaculaire locale : le français. Jehan Certain publie en 1485 le *Kadran aux Marchans*. Comme son nom l'indique, cet ouvrage comporte quatre parties : la première partie enseigne l'usage des chiffres « arabes » et les quatre opérations ainsi que l'usage des fractions¹¹ ; la deuxième partie est relative à la règle de trois et son emploi dans les poids et mesures ; la troisième partie est relative aux métaux précieux, aux monnaies et au taux des changes ; la quatrième partie, plus physique, se rapporte aux alliages et essais. Retenons de ces matières qu'à la fin du XV^e siècle, il était nécessaire d'enseigner à haut niveau la numération décimale de position et les opérations élémentaires.

En 1494, Luca Pacioli publie la très célèbre *Summa Arithmetica* imprimée à Venise. Pratiquement au même moment, des algébristes développent des théories qui sortent du cadre de cet exposé, mais il convient de noter qu'à la fin du siècle, la règle de trois est laborieuse, la division de fractions mal maîtrisée et l'usage des décimales inconnu. Mais le mouvement est lancé : entre 1472 et 1500, il est publié dans le Sud de l'Europe 214 ouvrages de mathématiques dont le formalisme reste élémentaire : pour Nicolas Chuquet, $12 + 3x = 4x^2$ s'écrit $12 \bar{p} 3^1$ egaulx à 4^2 .

L'explosion des mathématiques se produira au cours du XVI^e siècle avec en particulier : Christoff Rudolff (fractions décimales), Simon Stevin (nombres irrationnels), Jerome Cardan (nombres négatifs et imaginaires), François Viète (1540-1603) (formalisme moderne), et bien d'autres...

¹¹ Michel Serres, *Éléments d'Histoire des Sciences*, Ch. de P. Benoit, p. 197.