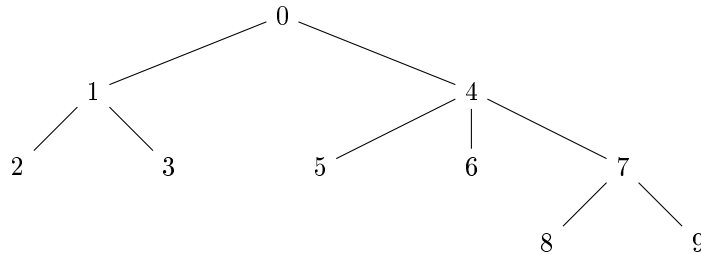


Nom :

Terminale NSI Plus proche ancêtre commun

(d'après concours École Polytechnique 2010)

Ce problème s'intéresse à la question suivante : étant donné un arbre et deux nœuds dans cet arbre, quel est le plus proche ancêtre commun de ces deux nœuds ? Une solution efficace à ce problème a de nombreuses applications, notamment en bio-informatique. Ainsi, dans l'arbre



le plus proche ancêtre commun des nœuds 5 et 8 est le nœud 4, et celui des nœuds 3 et 7 est la racine 0.

Les arbres que l'on considère ici ont des nœuds étiquetés par des entiers distincts. Chaque nœud a un nombre fini de descendants immédiats, appelés ses *filles*. Un nœud sans descendant est appelé une *feuille*. Dans l'exemple ci-dessus, le nœud 4 a trois fils, à savoir 5, 6 et 7, et les feuilles sont 2, 3, 5, 6, 8 et 9. Le *sous-arbre* du nœud i est défini récursivement de la manière suivante : c'est l'ensemble de nœuds contenant i et les nœuds de tous les sous-arbres des fils de i . On écrira simplement « sous-arbre i » pour désigner le sous-arbre du nœud i . Si un nœud j appartient au sous-arbre i , on dit que i est un ancêtre de j . En particulier, chaque nœud est son propre ancêtre. Dans l'exemple ci-dessus, le sous-arbre 7 est la liste [7,8,9].

Le plus proche ancêtre commun de deux nœuds i et j , noté $PPAC(i, j)$, est défini formellement de la manière suivante :

- si i est un ancêtre de j , alors $PPAC(i, j) = i$;
- symétriquement, si j est un ancêtre de i , alors $PPAC(i, j) = j$;
- sinon, $PPAC(i, j)$ est l'unique nœud a possédant au moins deux fils distincts f_1 et f_2 tels que i appartient au sous-arbre f_1 et j au sous-arbre f_2 .

Par exemple,

- Les ancêtres de 5 sont 0, 4 et 5.
- Les ancêtres de 8 sont 0, 4, 7 et 8.
- Les ancêtres communs à 5 et 8 sont donc 0 et 4. Le plus proche de 5 et de 8 est 4.

Dans cet exemple, on a $f_1 = 5$ et $f_2 = 7$.

1. Compléter le tableau ci-dessous, en mettant en-dessous de chaque nœud de l'arbre, son père :

nœud	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
père	None	0								

2. En déduire le tableau suivant, donnant, pour chaque nœud de l'arbre, la liste de ses ancêtres :

nœud	ancêtres
0	0
1	0,1
2	
3	
4	
5	0, 4, 5
6	
7	
8	0, 4, 7, 8
9	

3. Compléter le tableau suivant, dans lequel on placera, à l'intersection de la ligne i et de la colonne j , le plus proche ancêtre commun à i et j dans l'arbre précédent :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1										
2										
3								0		
4										
5									4	
6										
7				0						
8						4				
9										

4. Compléter le script Python ci-dessous, pour que la variable a ait pour valeur l'arbre de la page précédente :

```

a = {
    0: [1,4] ,
    1: [2,3] ,
    2: [] ,
    3:      ,
    4:      ,
    5:      ,
    6:      ,
    7:      ,
    8:      ,
    9: [] }

```