Thomson, William, An Instrument for calculating $\left(\int \Phi(x)\Psi(x)\,dx\right)$, the Integral of the Product of two given Functions, *Proceedings of the Royal Society,* 24 (1876), 266-268.

Reprint in Thomson, William & Tait, Peter Guthrie, *Treatise on Natural Philosophy,* vol 1, part 1, Cambridge : Cambridge University Press, 2nd ed., 1879, 493-496.

Trad. fr. par Marie-José Durand-Richard.

À la suite du récent congrès de la *British Association* à Bristol, je me suis penché à nouveau sur la recherche d'un instrument qui puisse remplacer le lourd travail arithmétique de calcul des intégrales nécessaires à l'analyse d'une fonction en ses constituants harmoniques simples, selon la méthode de Fourier. Auparavant, j'avais pensé pendant de nombreuses années que ce calcul pouvait être obtenu par quelque moyen mécanique simple ; mais ce n'est que récemment que j'ai réussi à concevoir un instrument qui approche suffisamment la simplicité pour être concrètement prometteur de résultats utiles. Parvenu à cette étape, j'ai décrit ce projet de machine à mon frère le Professeur James Thomson il y a quelques jours, et il m'a décrit en retour un intégrateur mécanique auquel il avait pensé voici plusieurs années, mais dont il n'avait jamais publié aucune description. J'ai immédiatement vu qu'il me donnait un moyen beaucoup plus simple d'atteindre mon objectif particulier que tout ce que j'avais été capable d'envisager jusque là. C'est la présentation de cet intégrateur que je communique à la *Royal Society* dans le présent mémoire.

Pour calculer $\int \Phi(x)\Psi(x)\,dx$, le disque en rotation doit être déplacé, à partir de zéro ou de sa position initiale, d'un angle égal à

$$\int_0^x \Phi(x)\,dx,$$

tandis que la boule roulante se déplace de telle sorte qu'elle reste toujours à une distance de sa position initiale égale à $\Psi(x)$. Ceci étant réalisé, le cylindre tournera d'un angle égal à $\int_0^x \Phi(x)\Psi(x)\,dx$, ce qui résout le problème.

Voici une façon de donner les mouvements requis au disque en rotation et à la sphère roulante :

Sur deux feuilles de papier, traçons les courbes

$$y = \int_0^x \Phi(x)\,dx \quad \text{et} \quad y = \Psi(x).$$

Fixons ces deux feuilles de papier sur la circonférence de deux cylindres, ou en différentes parties de la circonférence d'un cylindre, de telle sorte que l'axe des x de chacun soit perpendiculaire à l'axe du cylindre. Et installons un engrenage entre ces deux cylindres afin que leurs circonférences se meuvent à des vitesses égales. Fixons alors à un cadre mis en place près de la circonférence de chaque cylindre, une règle ou une tige pour guider un point mobile, déplacé par la main d'un opérateur, de telle sorte qu'il touche toujours la courbe tracée à la surface de chaque cylindre, tandis que les deux cylindres se déplacent.

Il faudra deux opérateurs, car un seul ne pourrait pas déplacer ces deux points en remplissant cette condition – à moins que le mouvement ne soit très lent. L'un de ces points, par un mécanisme approprié, donnera un mouvement angulaire au disque en rotation égal à son propre mouvement linéaire, et l'autre donnera un mouvement linéaire égal à son propre mouvement au centre de la boule roulante.

La machine ainsi décrite peut immédiatement être utilisée pour calculer les valeurs H_1, H_2, H_3, etc. des constituants harmoniques d'une fonction $\Psi(x)$ dans la splendide généralisation de la simple analyse harmonique de Fourier, qu'il a lui-même initiée dans les solutions qu'il a données pour la conduction de la chaleur dans la sphère et le cylindre, et qui a été si habilement et si élégamment travaillée par Poisson*, et par Sturm et Liouville dans leurs mémorables mémoires sur ce sujet, publiés dans le 1er volume du *Journal de Mathématiques* de Liouville. En effet, si

$$\Psi(x) = H_1\,\Phi_1(x) + H_2\,\Phi_2(x) + H_3\,\Phi_3(x) + \text{etc.}$$

est l'expression d'une fonction arbitraire Ψx en fonction des fonctions harmoniques généralisées Φ_1, Φ_2, Φ_3, etc., ces fonctions étant telles que

$$\int_0^l \Phi_1(x)\Phi_2(x)\,dx = 0,\quad \int_0^l \Phi_1(x)\Phi_3(x)\,dx = 0,\quad \int_0^l \Phi_2(x)\Phi_3(x)\,dx = 0,\quad \text{etc.},$$

on aura

$$H_1 = \frac{\int_0^l \Phi_1(x)\Psi(x)\,dx}{\int_0^l \{\Phi_1(x)\}^2\,dx},$$

$$H_2 = \frac{\int_0^l \Phi_2(x)\Psi(x)\,dx}{\int_0^l \{\Phi_2(x)\}^2\,dx},$$

etc.

Dans les applications physiques de cette théorie, les intégrales qui constituent les dénominateurs des formules pour H_1, H_2, etc. doivent toujours être évaluées en termes finis d'après une extension de la formule de Fourier pour $\int_0^X x\,u_i^2\,dx$ dans son problème du cylindre**, qu'a donnée Sturm dans l'équation (10), § iv de son *Mémoire sur une classe d'équations à différences partielles*, dans le *Journal* de Liouville, vol. 1 (1836). Les intégrales des numérateurs sont calculées très facilement à l'aide de la machine, fonctionnant de la manière décrite ci-dessus.

La grande utilité pratique de cette machine permettra d'effectuer l'analyse harmonique simple de Fourier pour les observations des marées, de la météorologie et peut-être même de l'astronomie. C'est le cas où

$$\Phi(x) = \frac{\sin}{\cos}(nx)$$

et où l'intégration est effectuée sur un intervalle égal à $\frac{2i\pi}{n}$ (*i* étant un entier), donné par cette application. Dans ce cas, il suffit d'ajouter un simple mécanisme à manivelle, pour donner un mouvement angulaire harmonique simple au disque rotatif dans la période propre $\frac{2\pi}{n}$, quand le cylindre qui porte la courbe $y = \Psi(x)$ tourne uniformément. Ce qui remplace la nécessité

* Voir sa démonstration générale du caractère réel des racines des équations transcendantes essentielles à son analyse (une étape très importante pour asseoir la position de Fourier) qu'il a donnée dans le *Bulletin de la Société Philomathique* en 1828, et qui est reproduite dans sa *Théorie Analytique de la Chaleur*, § 90.

** Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur*, § 319, p. 391 (Paris, 1822).

d'un cylindre portant la courbe $y = \Phi(x)$, ainsi que celle d'un opérateur gardant toujours un point sur cette courbe à la manière décrite ci-dessus. Il suffira ainsi d'un seul opérateur pour réaliser le processus. Et je crois qu'en utilisant cette machine pour l'analyse harmonique des marées, il pourra obtenir, en une heure ou deux, chacun des éléments harmoniques simples des marées d'une année enregistrées sur des courbes à la manière habituelle grâce à un marégraphe ordinaire – un résultat qui requiert jusqu'à présent pas moins de vingt quatre heures de calcul par des arithméticiens expérimentés. Je pense que cet instrument sera d'une grande utilité pour déterminer les constituants diurne, semi-diurne, ter-diurne, et quadri-diurne des variations quotidiennes de température, de pression barométrique, et des composantes Est-Ouest et Nord-Sud de la vitesse du vent, des trois composantes de la force magnétique terrestre, du potentiel électrique de l'air au point où le cours de l'eau se brise en gouttes dans les électromètres atmosphériques, et d'autres sujets relatifs aux observations magnétiques ou météorologiques ordinaires. Il permettra aussi d'estimer précisément la variation du magnétisme terrestre pendant la période de onze ans des taches solaires, et des taches solaires elles-mêmes ; de confirmer ou d'infirmer également d'éventuelles relations entre les taches solaires et les positions et conjonctions planétaires ; d'étudier aussi l'influence de la lune sur la hauteur du baromètre et sur les composantes de la force magnétique terrestre, et de trouver si l'influence de la lune est sensible sur tout autre phénomène météorologique.

À partir de la description donnée ci-dessus, on pourra montrer que le mécanisme requis pour l'instrument est extrêmement simple et facile. Sa précision dépendra essentiellement de celle du cylindre circulaire, du globe, et du plan du disque rotatif qui s'y trouvent utilisés. Pour chacune de ces trois surfaces, une utilisation beaucoup moins élaborée de la méthode de ponçage que Sir Joseph Whitworth a donnée pour obtenir un vrai plan avec une si merveilleuse exactitude sera sans aucun doute suffisante pour les exigences pratiques de l'instrument ici proposé.